

ÉTUDES SUR L'ÉQUATION

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \Delta^m u = 0$$

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND ET PUBLIQUEMENT

SOUTENUE LE 27 MAI DES 10 HEURES DU MATIN

DANS LA SALLE N^o VII

PAR

GUNNAR STADLER

LICENCIÉ ÈS SCIENCES, MLM.



LUND 1916

BERLINGSKA BOKTRYCKERIET

ÉTUDES SUR L'ÉQUATION

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \Delta^m u = 0$$

PAR

GUNNAR STADLER



LUND 1916

A.-B. PH. LINDSTEDTS UNIV.-BOKHANDEL

LUND 1916
BERLINGSKA BOKTRYCKERIET

Introduction.

Dans ces derniers temps, la théorie des équations aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes, à une seule caractéristique, a fait de grands progrès.

D'abord, l'équation de la chaleur a été très profondément étudiée par M. M. HOLMGREN, LEVI et GEVREY.* Puis M. M. BLOCK et GEVREY ont traité d'équations plus générales du deuxième ordre.**

Les équations pour lesquelles le problème de CAUCHY est possible, au point de vue des variables réelles, ont été déterminées par M. LEVI.***

Recemment, nos connaissances sur les équations d'ordre supérieur à deux ont été considérablement augmentées par les travaux de M. BLOCK,† lequel s'occupe de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0 \quad p \text{ et } q \text{ sans facteur commun,}$$

ainsi que de l'équation plus générale

$$(2) \quad \frac{\partial^p u}{\partial x^p} + A_1 \frac{\partial^{p-m+n}}{\partial x^{p-m} \partial y^n} + A_2 \frac{\partial^{p-2m+2n}}{\partial x^{p-2m} \partial y^{2n}} + \dots + A_\kappa \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0 \quad p = m\kappa, \quad q = n\kappa,$$

où a et A_i sont des constantes. Il a retrouvé la plupart des caractères de l'équation de la chaleur, tant au point de vue des propriétés de la solution fondamentale, que d'ailleurs en ce qui concerne le problème d'intégration.

Dans ce qui suivra, nous allons étudier une équation à trois variables indépendantes avec des propriétés analogues à celles de (1)

$$(e) \quad \frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a A^m u = 0.$$

* E. HOLMGREN, Arkiv för Matematik, 1907, 1908. E. LEVI, Annali di Matematica, 1908. M. GEVREY, Journal de Mathématiques 1913, 1914.

** H. BLOCK, Arkiv för Matematik, 1910.

*** Caratteristiche multiple e problema di CAUCHY, Annali di Matematica 1909.

† Arkiv för Matematik, tomes 7, 8 et 9.

On entend par A^m l'opération obtenue en répétant m fois l'opération de LAPLACE,

$$A = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et a est une constante, dont la valeur absolue sera supposée égale à un.

Nous allons supposer p et m premiers entre eux. Quand ces nombres ont un facteur commun, on doit considérer au lieu de (e) une équation plus générale, analogue à (2), mais nous ne nous en occuperons pas ici.

Parmi les équations de la forme (e), il y en a trois que l'on a rencontré dans la physique mathématique, à savoir l'équation de la chaleur, ainsi que

$$(3) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + Au = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 u = 0,$$

dont la première se présente dans les recherches de CAUCHY* et POISSON** sur les ondes.

En cherchant la solution fondamentale de (e), nous nous sommes servi de l'expression

$$(F) \quad \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i[a(\xi-x) + \beta(\eta-y) + \gamma(\zeta-z)]} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{f(i\alpha, i\beta, i\gamma)},$$

étudiée par M. N. ZEILON*** Dans le cas où (F) est convergente, la partie réelle en nous fournit une solution fondamentale de l'équation linéaire à coefficients constants

$$f\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) = 0.$$

On sait que M. FREDHOLM† a commencé la recherche des solutions fondamentales de telles équations d'ordre supérieur à deux en étudiant le cas des équations elliptiques homogènes, cas où le polynôme

$$(4) \quad f(i\alpha, i\beta, i\gamma)$$

est une forme homogène définie. Dans ce cas, la solution fondamentale s'exprime au moyen d'une somme d'intégrales abéliennes de première espèce de la courbe $f(\alpha, \beta, 1) = 0$.

Cette solution a été retrouvée par M. ZEILON en considérant l'expression (F), qui est convergente dans le cas en question. Puis, M. ZEILON s'est occupé du cas d'une équation quelconque à coefficients constants, et nous a montré comment on doit procéder pour donner un sens à l'expression (F) dans le cas où le polynôme (4) s'évanouit pour des valeurs réelles des variables.

* Oeuvres, t. I.

** Mém. de l'Acad. Roy. d. Sc. t. I. 1816.

*** Arkiv för Matematik, tomes 6 et 9.

† Rendiconti del circ. mat. 1908.

En traitant l'équation (e), on trouve qu'il y a un cas où (4) s'évanouit pour d'autres valeurs des variables que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, à savoir le cas où $p = 2q$, $\alpha = (-1)^q$. Dans ce qui suivra, nous ne nous occuperons pas de ce cas, auquel appartient du reste les deux équations (3).

Dans chaque autre cas, (4) ne s'annule que quand $\alpha = \beta = \gamma = 0$, et (F) peut être rendu convergente en ajoutant un certain terme complémentaire, polynome en $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$.

Il faut considérer séparément les cas $p > 2m$, et $p < 2m$, qui ont des caractères très différents.

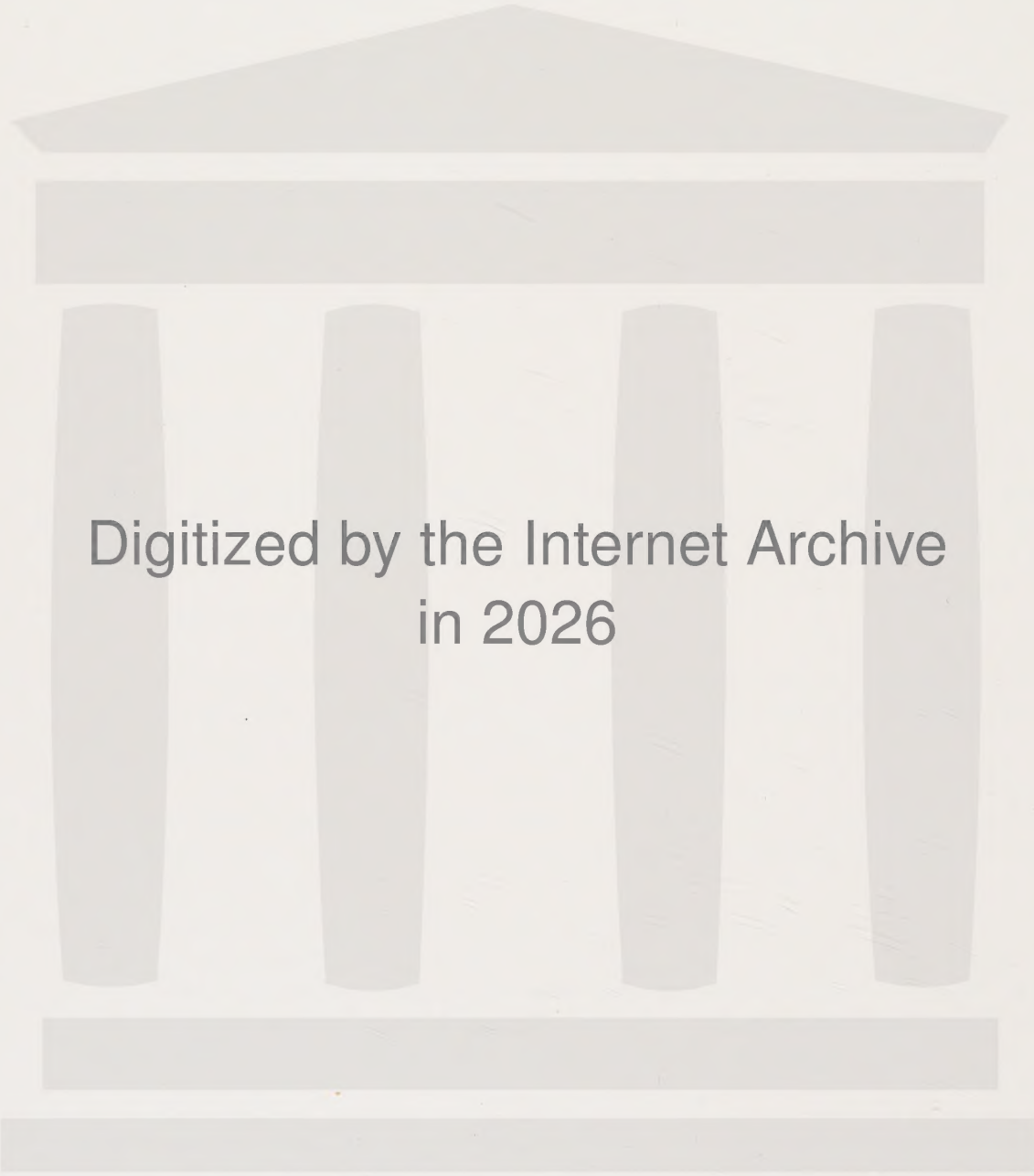
Dans les chapitres I, II et III, nous avons traité le cas $p > 2m$. Il y a des caractéristiques réelles, mais elles ne jouent aucun rôle dans le problème. Après avoir trouvé la solution fondamentale F , et établi la formule de GREEN, ainsi que quelques théorèmes d'unicité, nous avons étudié plus profondément deux équations spéciales.

Le chapitre IV contient les recherches sur le cas $p < 2m$.

Ce sont les travaux de M. H. BLOCK, professeur à l'École Polytechnique de Gothembourg, qui ont été le point de départ de ces recherches. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements pour ses conseils très bienveillants et ses encouragements. Je dois aussi remercier M. M. T. BRODÉN et N. E. NÖRLUND, professeurs à notre Université, pour l'intérêt qu'ils ont pris à mon travail.

Lund, le 8 mai 1916.

Gunnar Stadler.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553402_0041

I. L'équation (e) dans le cas $p > 2m$.

1. Nous allons étudier l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \quad L(u) = \frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \Delta^m u = 0,$$

où a est une constante et $p > 2m$, de sorte que l'équation est de l'ordre p . Nous ne nous occuperons que du cas où p et m n'ont pas de diviseur commun. De plus, nous allons supposer dans ce qui suivra que la valeur absolue de la constante a est 1, ce qu'on peut toujours atteindre par un changement de variables convenable.

Faisons une restriction en excluant de nos études le cas $p = 2q$, $a = (-1)^q$. On voit que chacune des équations considérées peut être ramenée à une des deux

$$(e_1) \quad \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} + (-1)^{q+1} \Delta^m u = 0,$$

$$(e_2) \quad \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} + (-1)^{q-m} \Delta^m u = 0.$$

Les caractéristiques de l'équation (e) sont données par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^p = 0.$$

Ce sont des cylindres, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x . Chaque cylindre est une caractéristique p -uple.

Pour obtenir la formule fondamentale, nous devons faire usage de l'équation adjointe de (e) qui s'écrit

$$(m) \quad M(v) = (-1)^p \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + a \Delta^m v = 0.$$

Considérons l'intégrale

$$\int_V \int [vL(u) - uM(v)] dx dy dz,$$

étendue à un volume fini V , limité par la surface S . Cette intégrale est nulle si u et v sont des solutions de (e) et de (m), ce que nous supposons. L'intégrale se transforme par des intégrations par parties répétées, et nous trouvons la formule

$$(1) \quad \begin{aligned} & \iint_S \left(v \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^{p-2} u}{\partial x^{p-2}} + \dots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} u \right) \cos x N d\sigma + \\ & + a \iint_S \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial y} A^{m-1} u - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} A^{m-1} v \cdot u \right) \cos y N d\sigma + \\ & + a \iint_S \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial z} A^{m-1} u - \frac{\partial v}{\partial z} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} v \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} A^{m-1} v \cdot u \right) \cos z N d\sigma = 0, \end{aligned}$$

où N désigne la normale extérieure.

Définissons maintenant une surface S particulière. Considérons deux surfaces σ_0 et σ_1 , ne se coupant pas, rencontrées respectivement en un seul point par chaque ligne parallèle à l'axe des x , et ayant en chaque point un plan tangent déterminé, jamais parallèle à l'axe des x . Soient

$$x = \chi_0(y, z) \text{ et } x = \chi_1(y, z)$$

leurs équations, les fonctions χ_0 , $\chi_0^{(10)}$ et $\chi_1^{(01)}$ étant continues, et supposons que $\chi_0(y, z) < \chi_1(y, z)$. Soit de plus donné un cylindre caractéristique, coupé par les plans $x = \text{const.}$ suivant des courbes fermées admettant en chaque point une tangente déterminée, sauf dans un nombre limité de *pointes*, où elles auront deux tangentes. Appelons Σ la partie de ce cylindre limitée par σ_0 et σ_1 .

Dans le cas de la surface S composée de σ_0 , σ_1 et Σ , la formule (1) s'écrit

$$(2) \quad \begin{aligned} & \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(v \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^{p-2} u}{\partial x^{p-2}} + \dots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} u \right) \cos x N d\sigma - \\ & - a \iint_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u - \frac{\partial v}{\partial n} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} v \cdot u \right) ds dx = 0, \end{aligned}$$

où dans la dernière intégrale les dérivées sont prises dans le sens de la normale intérieure de la courbe de section de S par un plan $x = \text{const.}$. . On désigne par s l'arc de courbe de cette même section.

Pour que la formule (2) soit valable, il faut supposer que u et v sont régulières dans V et sur S , c'est-à-dire qu'elles sont continues, ainsi que celles de leurs dérivées qui figurent dans les équations (e) et (m). La fonction v dont nous nous servirons est singulière pour $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Si donc le point (ξ, η, ζ) se trouve dans V ou sur S , il faut, pour pouvoir appliquer la formule (1), isoler la singularité par une surface convenable, comme nous le montrerons plus loin.

Posons dans la formule (2) $v=1$. Nous obtenons

$$\int_{\sigma_0 + \sigma_1} \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} \cos x N d\sigma - a \int_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{A}^{m-1} u ds dx = 0.$$

Cette formule est pour l'équation (e) l'analogue de la formule

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

dans la théorie de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. Laissons maintenant la formule fondamentale et passons à la recherche de la solution fondamentale. Dans le cas de l'équation (e), l'expression (F) s'écrit

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\alpha(\xi-x) + \beta(\eta-y) + \gamma(\zeta-z)]}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m (\beta^2 + \gamma^2)^m} d\alpha d\beta d\gamma.$$

La fonction intégrée devenant infinie pour $\alpha=\beta=\gamma=0$, il faut en général modifier l'expression pour obtenir une intégrale convergente. C'est en partant de l'expression obtenue en effectuant sur (F) l'opération $\mathcal{A}^{m-1}$, c'est-à-dire de

$$\frac{(-1)^{m-1}}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta^2 + \gamma^2)^{m-1} e^{i[\alpha(\xi-x) + \beta(\eta-y) + \gamma(\zeta-z)]}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m (\beta^2 + \gamma^2)^m} d\alpha d\beta d\gamma,$$

dont la partie réelle est convergente pour $(\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 > 0$, que nous trouverons une détermination de F.

Introduisons des coordonnées polaires en posant

$$\begin{aligned} \eta - y &= r \cos \psi & \beta &= \varrho \cos \varphi \\ \zeta - z &= r \sin \psi & \gamma &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$(3). \quad \frac{(-1)^{m-1}}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^{2m-1} e^{i\alpha(\xi-x) + ir\varrho \cos(\varphi-\psi)}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho d\varphi.$$

On trouve aisément que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\varrho \cos(\varphi-\psi)} d\varphi$$

est indépendante de ψ . Elle est égale à

$$2\pi J_0(r\varrho),$$

J_0 désignant la fonction de BESSEL d'ordre zéro

$$(4) \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \psi) d\psi.$$

Donc, l'expression (3) s'écrit

$$(5) \quad \frac{(-1)^{m-1}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\varrho^{2m-1} e^{i\alpha(\xi-x)} J_0(r\varrho)}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho.$$

La partie réelle de cette expression sera par définition $\Delta^{m-1} F$, où F est la solution fondamentale. Quand $m=1$, elle nous fournit directement la solution fondamentale. Nous démontrerons plus loin que l'intégrale est convergente pour $r > 0$. Quand $r=0$, la fonction sera définie par ses valeurs limites. Nous verrons que la fonction $\Delta^{m-1} F$ ainsi définie est régulière, sauf pour $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$.

En poursuivant l'étude, il faut considérer séparément les deux équations (e₁) et (e₂).

3. Dans le cas de l'équation (e₁), on a $p=2q$, $a=(-1)^{q+1}$. De plus, $2q$ et m n'ayant pas de diviseur commun, m est impair. Donc, nous avons

$$(6) \quad \Delta^{m-1} F = \frac{(-1)^q}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \alpha(\xi-x) \cdot \varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho.$$

Il faut examiner si l'intégrale double est convergente. D'abord, la singularité $\alpha=\varrho=0$ ne nous cause aucune difficulté. La partie de l'intégrale qui vient du domaine $0 \leq \alpha \leq \infty$, $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ est absolument convergente. En effet, elle est, en valeur absolue, moindre que ou égale à

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^{\varrho_0} d\varrho \frac{\varrho^{2m-1}}{\varrho^{2m} + \alpha^{2q}} = \frac{1}{2m} \int_0^\infty \log \left(1 + \frac{\varrho_0^{2m}}{\alpha^{2q}} \right) d\alpha$$

qui est finie.

Considérons maintenant l'intégrale

$$(7) \quad \int_{\varrho_0}^\infty d\varrho \int_0^A d\alpha \frac{\cos \alpha(\xi-x) \cdot \varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}}.$$

Nous allons démontrer qu'elle est uniformément convergente pour $A > 0$ si $r > 0$.

I) Supposons d'abord que $x \neq \xi$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^A d\alpha \frac{\cos \alpha(\xi-x)}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}} = \frac{1}{\xi-x} \left(\frac{\sin A(\xi-x)}{A^{2q} + \varrho^{2m}} + 2q \int_0^A d\alpha \frac{\alpha^{2q-1} \sin \alpha(\xi-x)}{(\alpha^{2q} + \varrho^{2m})^2} \right),$$

expression qui est, en valeur absolue, moindre que

$$\frac{\varrho^{-2m}}{|\xi-x|} \left(1 + 2q \int_0^\infty d\beta \frac{\beta^{2q-1}}{(\beta^{2q} + 1)^2} \right).$$

Par suite, le module de l'expression (7) est inférieur à

$$M \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{|J_0(r\varrho)|}{\varrho} d\varrho,$$

où M est une quantité finie, indépendante de A . Or, l'intégrale de cette dernière expression est convergente pour $r > 0$, comme on le trouve en tenant compte de l'égalité asymptotique

$$(8) \quad J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\sqrt{x}} (1 + \varepsilon),$$

valable quand x tend vers l'infini. Donc, l'intégrale (7) est uniformément convergente.

II) Soit maintenant $x = \xi$. L'intégrale

$$\int_0^A \frac{\varrho^{2m-1} d\alpha}{\varrho^{2m} + \alpha^{2q}} = \varrho^{\frac{m}{q}-1} \int_0^{\frac{A}{\varrho}} \frac{d\beta}{1 + \beta^{2q}}$$

étant fonction positive décroissante de ϱ , le deuxième théorème des valeurs moyennes donne

$$\int_{\omega}^{\infty} d\varrho \int_0^A \frac{\varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}} = \int_0^A \frac{\omega^{2m-1}}{\alpha^{2q} + \omega^{2m}} d\alpha \int_{\omega}^{\infty} J_0(r\varrho) d\varrho.$$

Quand $r > 0$, la valeur absolue de cette expression est moindre que

$$M \int_0^{\infty} \frac{\omega^{2m-1}}{\alpha^{2q} + \omega^{2m}} d\alpha,$$

M étant indépendante de A , et comme cette dernière quantité tend vers zéro quand ω croît vers l'infini, notre but est atteint.

L'intégrale (7) représente une fonction continue de A , qui a une limite quand A tend vers l'infini.

En faisant usage de ces propriétés de (7), on démontre aisément que l'intégrale double (6) a une limite si $r > 0$.

Ce point établi, nous allons chercher à évaluer l'intégrale par rapport à ϱ de (6), laquelle s'écrit

$$(9) \quad \int_0^{\infty} d\varrho \frac{\varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\varrho^{2m} + \alpha^{2q}} \quad \alpha > 0, \quad r > 0.$$

Comme nous rencontrerons plus loin d'autres intégrales qui sont de la forme

$$(10) \quad \int_0^{\infty} d\varrho \frac{\varrho^{a_1} J_0(r\varrho)}{\varrho^{2a_2} + \alpha^{2a_3}} \quad a_1 \leq 2a_2 - 1,$$

il est avantageux de considérer au lieu de (9) cette intégrale plus générale.

Introduisons l'expression suivante de $J_0(r\rho)$

$$J_0(r\rho) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin r\rho\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} d\gamma.$$

Après avoir changé l'ordre des intégrations, nous trouvons

$$(11) \quad \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{a_1} \sin r\rho\gamma}{\rho^{2a_2} + \alpha^{2a_3}}.$$

Cependant, il faut démontrer que l'on a le droit de changer l'ordre des intégrations.

Remarquons d'abord que l'intégrale (11) est convergente. Nous le verrons plus loin.

Nous allons montrer que si ε et B_0 sont deux quantités données et $B_0 > 1$, on peut trouver un nombre B plus grand que B_0 et tel que, pour $A > 0$, la valeur absolue de l'intégrale

$$(12) \quad \int_0^A d\rho \frac{\rho^{a_1}}{\rho^{2a_2} + \alpha^{2a_3}} \int_B^\infty d\gamma \frac{\sin r\rho\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}$$

est moindre que ε . En effet, on a en intégrant par parties

$$\int_B^\infty d\gamma \frac{\rho \sin r\rho\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} = \frac{\cos r\rho B}{r\sqrt{B^2-1}} - \int_B^\infty d\gamma \frac{\gamma \cos r\rho\gamma}{r(\gamma^2-1)^{3/2}}.$$

Par conséquent, (12) est, en valeur absolue, moindre que

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{B^2-1}} + \int_B^\infty d\gamma \frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{3/2}} \right) \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{a_1-1}}{\rho^{2a_2} + \alpha^{2a_3}},$$

expression que l'on peut faire arbitrairement petite, en prenant B suffisamment grand.

Cela suffit pour démontrer que les deux intégrales itératives sont égales. En effet, considérons la différence

$$\int_0^A d\rho \int_1^\infty d\gamma - \int_1^\infty d\gamma \int_0^\infty d\rho = \int_0^A d\rho \int_B^\infty d\gamma - \int_1^B d\gamma \int_A^\infty d\rho - \int_B^\infty d\gamma \int_0^\infty d\rho.$$

Évidemment, nous pouvons déterminer B de telle manière que la première et la troisième des intégrales à droite soient, en valeur absolue, moindres que $\frac{\varepsilon}{3}$. La quantité B étant fixée ainsi, nous pouvons trouver un nombre A_0 si grand que, pour $A > A_0$, il en est de même de la seconde, et nous sommes arrivés au but.

Revenons maintenant à l'étude de l'expression (11). Il faut évaluer l'intégrale

$$(13) \quad \int_0^z dQ \frac{Q^{a_1} \sin r\gamma Q}{Q^{2a_2+1} \alpha^{2a_3}},$$

qui est la partie réelle de

$$-\frac{i}{2} \int_{-z}^z dQ \frac{Q^{a_1} e^{ir\gamma Q}}{Q^{2a_2+1} \alpha^{2a_3}}.$$

Cette dernière intégrale se calcule à l'aide du théorème des résidus. En effet, les racines

$$Q_\nu = (\lambda_\nu + i\mu_\nu)\alpha^{a_2} = e^{i\theta_\nu^1} \alpha^{\frac{a_3}{a_2}}$$

de l'équation en Q

$$(14) \quad Q^{2a_2} + \alpha^{2a_3} = 0$$

sont toutes complexes.

L'application du théorème des résidus donne

$$2\pi i \sum_{Q_+} \left(-\frac{i}{2} \frac{e^{ir\gamma Q_\nu}}{2a_2 Q_\nu^{2a_2-a_1-1}} \right)$$

ou

$$\frac{\pi}{2a_2} \alpha^{-2a_3+(a_1+1)\frac{a_3}{a_2}} \sum_{Q_+} e^{-\mu_\nu r\gamma \alpha^{\frac{a_3}{a_2}} + i\lambda_\nu r\gamma \alpha^{\frac{a_3}{a_2}} - i\theta_\nu^1 (2a_2 - a_1 - 1)},$$

la somme étant étendue sur toutes les racines à partie imaginaire positive. En prenant la partie réelle, on trouve que (13) est égale à

$$\frac{\pi}{2a_2} \alpha^{-2a_3+(a_1+1)\frac{a_3}{a_2}} \sum_{Q_+} e^{-\mu_\nu r\gamma \alpha^{\frac{a_3}{a_2}}} \cos [\lambda_\nu r\gamma \alpha^{\frac{a_3}{a_2}} - \theta_\nu^1 (2a_2 - a_1 - 1)].$$

A l'aide de cette expression, l'intégrale (11) ou, ce qui est la même chose, l'intégrale (10) s'écrit

$$(15) \quad \frac{1}{a_2} \alpha^{-2a_3+(a_1+1)\frac{a_3}{a_2}} \sum_{Q_+} [\cos(2a_2 - a_1 - 1)\theta_\nu^1 \cdot P_\nu(r\alpha^{\frac{a_3}{a_2}}) + \sin(2a_2 - a_1 - 1)\theta_\nu^1 \cdot Q_\nu(r\alpha^{\frac{a_3}{a_2}})],$$

où les fonctions $P_\nu(x)$ et $Q_\nu(x)$ sont définies par

$$(16) \quad P_\nu(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-\mu_\nu x\gamma} \cos \lambda_\nu x\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} d\gamma \quad \text{et} \quad Q_\nu(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-\mu_\nu x\gamma} \sin \lambda_\nu x\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} d\gamma.$$

Les fonctions P_ν et Q_ν sont des fonctions de BESSEL. Quand $\lambda_\nu = 0$, on a $\mu_\nu = 1$, et $P_\nu(x)$ est égale à

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x\gamma} d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} i H_0^1(ix),$$

où H_0^1 est la fonction

$$H_0^1(x) = J_0(x) - iY_0(x),$$

étudiée par M. HANKEL *. On trouve donc que $P_\nu(x)$ est la partie réelle de

$$\frac{\pi}{2} i H_0^1[(\lambda_\nu + i\mu_\nu)x],$$

et $Q_\nu(x)$ la partie réelle de

$$\frac{\pi}{2} H_0^1[(\lambda_\nu + i\mu_\nu)x].$$

En se servant des expressions

$$(17) \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \text{ et } Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \Psi(n+1),$$

on obtient

$$(18) \quad \begin{aligned} P_\nu(x) &= \left(\theta_\nu - \frac{\pi}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2n\theta_\nu}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n\theta_\nu}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \left[\log \frac{x}{2} - \Psi(n+1) \right], \\ Q_\nu(x) &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\nu \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n\theta_\nu}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2n\theta_\nu}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \left[\log \frac{x}{2} - \Psi(n+1) \right]. \end{aligned}$$

Il faut étudier les propriétés de P_ν et Q_ν quand x tend vers $+\infty$. Faisons d'abord un changement de la variable d'intégration en posant $\gamma = 1 + \frac{u}{x}$. Nous obtenons

$$P_\nu(x) = \frac{e^{-\mu_\nu x} \cos \lambda_\nu x}{\sqrt{2x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu_\nu u} \cos \lambda_\nu u}{\sqrt{u + \frac{u^2}{2x}}} du - \frac{e^{-\mu_\nu x} \sin \lambda_\nu x}{\sqrt{2x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu_\nu u} \sin \lambda_\nu u}{\sqrt{u + \frac{u^2}{2x}}} du,$$

et une expression tout analogue vaut pour $Q_\nu(x)$. Pour obtenir un développement asymptotique, nous introduisons dans les intégrales le développement de $\left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Les intégrales

* Voir Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. XIX 1910. P. SCHAFHEITLIN. Die semikonvergenten Reihen für die BESSELSCHEN Funktionen.

$$I_{1n} = \int_0^\infty e^{-\mu_\nu u} u^{n-\frac{1}{2}} \cos \lambda_\nu u \, du \text{ et } I_{2n} = \int_0^\infty e^{-\mu_\nu u} u^{n-\frac{1}{2}} \sin \lambda_\nu u \, du,$$

que nous rencontrons, ont les valeurs *

$$I_{1n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \frac{2n-1}{n-1} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \theta'_\nu \right), I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \frac{2n-1}{n-1} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \theta'_\nu \right).$$

On trouve les représentations asymptotiques

$$(19) \quad \begin{aligned} P_\nu(x) &\sim \frac{e^{-\mu_\nu x}}{\sqrt{2x}} (I_{10} \cos \lambda_\nu x - I_{20} \sin \lambda_\nu x) \\ Q_\nu(x) &\sim \frac{e^{-\mu_\nu x}}{\sqrt{2x}} (I_{10} \sin \lambda_\nu x + I_{20} \cos \lambda_\nu x), \end{aligned}$$

valables quand x tend vers $+\infty$. Les dérivées des fonctions P_ν et Q_ν ont des représentations analogues.

Revenons maintenant à l'intégrale (9). En faisant usage de l'expression (15), on trouve qu'elle est égale à

$$\frac{1}{m} \sum_{q=+} P_\nu(r\alpha^m).$$

En introduisant cette valeur de (9) dans (6), on obtient pour $\Delta^{m-1}F$ la représentation suivante

$$(20) \quad \Delta^{m-1}F = \frac{(-1)^q}{2m\pi^2} \sum_{q=+} \int_0^\infty P_\nu(r\alpha^m) \cos \alpha(\xi - x) d\alpha.$$

Quand $r > 0$; l'intégrale est absolument convergente, comme on le trouve en tenant compte de (19), μ_ν étant plus grand que zéro. Il en est de même des intégrales que l'on obtient en dérivant un nombre quelconque de fois par rapport aux variables ξ , x et r . On voit bien aisément que (20) est une solution de l'équation (e₁).

Faisons maintenant dans (20) le changement de variable d'intégration

$$\alpha r^q = \lambda,$$

et introduisons la notation

$$(21) \quad t = \frac{\xi - x}{r^p}$$

Nous aurons

* Voir WEBER. Die partiellen Differentialgl. d. math. Physik. p. 35.

$$(22) \quad A^{m-1}F = \frac{1}{r^q} f_{m-1}(t),$$

où

$$(23) \quad f_{m-1}(t) = \frac{(-1)^q}{2m\pi^2} \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{\nu}(\lambda^m) \cos \lambda t d\lambda.$$

L'intégrale de (23) est absolument et uniformément convergente. Elle peut être différenciée un nombre quelconque de fois par rapport à t sans cesser d'être convergente. On voit que $f_{m-1}(t)$ est une fonction entière. Le développement en série de TAYLOR s'obtient en introduisant dans l'intégrale le développement de $\cos \lambda t$.

4. Considérons maintenant l'équation (e_2). Dans ce cas nous avons $p = 2q + 1$, $a = (-1)^{q-m}$. En prenant la partie réelle de (5), nous obtenons

$$(24) \quad A^{m-1}F = \frac{(-1)^{m+q-1}}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(\xi - x) \cdot \varrho^{4m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} d\alpha d\varrho + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha(\xi - x) \cdot \alpha^{2q+1} \varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} d\alpha d\varrho \right\}.$$

Montrons que les intégrales doubles sont convergentes. La première intégrale ne cause aucune difficulté. En effet, elle est de la même forme que l'intégrale (6) traitée dans le paragraphe 3. L'étude de la seconde se fait comme dans le cas de l'intégrale (6).

D'abord, la partie qui vient du domaine d'intégration $0 \leq \alpha \leq \infty$, $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ est en valeur absolue moindre que, ou égale à

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\varrho_0} d\varrho \frac{\alpha^{2q+1} \varrho^{2m-1}}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} = \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\varrho_0^{2m}}{\alpha^{2q+1}} d\alpha.$$

Elle est absolument convergente.

Examinons l'intégrale

$$(25) \quad \int_{\varrho_0}^{\infty} d\varrho \int_0^A d\alpha \frac{\sin \alpha(\xi - x) \cdot \alpha^{2q+1} \varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}}.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^A d\alpha \frac{\alpha^{2q+1} \sin \alpha(\xi - x)}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} = \frac{1}{\xi - x} \left(- \frac{A^{2q+1} \cos A(\xi - x)}{A^{4q+2} + \varrho^{4m}} + \right. \\ \left. + (2q+1) \int_0^A d\alpha \cos \alpha(\xi - x) \frac{\varrho^{4m} \alpha^{2q} - \alpha^{6q+2}}{(\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m})^2} \right).$$

Le module de cette expression étant inférieur à

$$\frac{\varrho^{-2m}}{|\xi - x|} \left(1 + (2q+1) \int_0^\infty d\beta \frac{\beta^{2q} + \beta^{6q+2}}{(\beta^{4q+2} + 1)^2} \right),$$

on conclut que (25) est, en valeur absolue, inférieure à

$$M \int_{\varrho_0}^\infty \frac{|J_0(r\varrho)|}{\varrho} d\varrho,$$

M étant indépendante de A , d'où suit que (25) est uniformément convergente pour $A > 0$ si $r > 0$. De plus, (25) est une fonction continue de A qui a une limite quand A tend vers l'infini. Ces propriétés de (25) suffisent pour démontrer que l'intégrale double existe pour $r > 0$.

Considérons maintenant les intégrales par rapport à ϱ dans (24)

$$(26) \quad \int_0^\infty d\varrho \frac{\varrho^{4m-1} J_0(r\varrho)}{\varrho^{4m} + \alpha^{4q+2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty d\varrho \frac{\alpha^{2q+1} \varrho^{2m-1} J_0(r\varrho)}{\varrho^{4m} + \alpha^{4q+2}}.$$

Elles sont de la forme (10). En remarquant que dans le cas actuel

$$\theta_\nu = (2\nu + 1) \frac{\pi}{4m},$$

l'expression (15) nous donne les valeurs

$$\frac{1}{2m} \sum_{\varrho_+} P_\nu(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^\nu}{2m} \sum_{\varrho_+} Q_\nu(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}).$$

En introduisant ces expressions dans (24), on obtient pour $A^{m-1}F$ la représentation

$$(27) \quad A^{m-1}F = \frac{(-1)^{m+q-1}}{4m\pi^2} \sum_{\varrho_+} \int_0^\infty [P_\nu(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \cos \alpha(\xi - x) + (-1)^\nu Q_\nu(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \sin \alpha(\xi - x)] d\alpha.$$

L'expression trouvée pour $A^{m-1}F$ a les mêmes propriétés que (20). Quand $r > 0$, l'intégrale est absolument convergente. Il en est de même des intégrales que l'on obtient en dérivant (27) un nombre quelconque de fois.

Posons maintenant dans (27)

$$\alpha r^{\frac{2q+1}{2m}} = \lambda.$$

Nous aurons

$$(28) \quad A^{m-1}F = \frac{1}{r^{\frac{2q+1}{2m}}} f_{m-1}(t),$$

où

$$(29) \quad f_{m-1}(t) = \frac{(-1)^{m+q-1}}{4m\pi^2} \sum_{\varrho_+} \int_0^\infty [P_\nu(\lambda^{\frac{2q+1}{2m}}) \cos \lambda t + (-1)^\nu Q_\nu(\lambda^{\frac{2q+1}{2m}}) \sin \lambda t] d\lambda.$$

L'intégrale est absolument et uniformément convergente. Les dérivations par rapport à t peuvent s'effectuer sous le signe intégrale. On voit que dans le cas actuel aussi $f_{m-1}(t)$ est une fonction entière.

5. Les expressions (20) et (27) nous donnent la valeur de $A^{m-1}F$ quand $r > 0$, et cela même pour $x = \xi$. Mais il faut savoir comment se comporte cette fonction pour $r = 0$, ou, ce qui revient au même, savoir les propriétés de $f_{m-1}(t)$ quand t tend vers $\pm \infty$. Pour cela, nous allons maintenant chercher une autre représentation de $A^{m-1}F$.

C'est en évaluant l'intégrale par rapport à α de l'expression (5)

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q^{2m-1} e^{i\alpha(\xi-x)}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m Q^{2m}}$$

que nous arriverons à une autre expression.

Cette intégrale sera calculée à l'aide du théorème des résidus. Nous devons donc considérer les racines de l'équation en α

$$(31) \quad i^p \alpha^p + a(-1)^m Q^{2m} = 0.$$

Ces racines, qui sont toutes complexes, s'écrivent

$$\alpha_{\nu} = (\alpha_{\nu} + i\beta_{\nu}) Q^{\frac{2m}{p}}.$$

Désignons par α_{+} une racine à partie imaginaire positive, et de même par $\bar{\alpha}_{-}$ une racine à partie imaginaire négative. Nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{\alpha_{+}} \frac{Q^{2m-1} e^{i\alpha_{+}(\xi-x)}}{p i^p \alpha_{+}^{p-1}} & \quad \xi \geq x \\ - 2\pi i \sum_{\alpha_{-}} \frac{Q^{2m-1} e^{i\bar{\alpha}_{-}(\xi-x)}}{p i^p \alpha_{-}^{p-1}} & \quad \xi \leq x, \end{aligned}$$

où la première somme s'étend sur toutes les racines α_{+} à partie imaginaire positive, tandis que la dernière s'étend sur les racines à partie imaginaire négative. En faisant usage de la notation

$$i\bar{\alpha}_{\nu} = (-\beta_{\nu} + i\alpha_{\nu}) Q^{\frac{2m}{p}} = e^{i\theta_{\nu}} Q^{\frac{2m}{p}},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{p} \sum_{\alpha_{+}} \frac{1}{Q^{1-\frac{2m}{p}}} e^{-\beta_{\nu}(\xi-x) Q^{\frac{2m}{p}} + i\alpha_{\nu}(\xi-x) Q^{\frac{2m}{p}} - i\theta_{\nu}(p-1)} & \quad \xi \geq x \\ - \frac{2\pi}{p} \sum_{\alpha_{-}} \frac{1}{Q^{1-\frac{2m}{p}}} e^{\beta_{\nu}(x-\xi) Q^{\frac{2m}{p}} - i\alpha_{\nu}(x-\xi) Q^{\frac{2m}{p}} - i\theta_{\nu}(p-1)} & \quad \xi \leq x. \end{aligned}$$

Introduisons la valeur de l'intégrale (30) dans (5) et prenons la partie réelle. Nous obtenons

$$(32) \quad \begin{aligned} A^{m-1}F = & \frac{(-1)^{m-1}}{2p\pi} \sum_{\alpha_+} \int_0^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{1-\frac{2m}{p}}} e^{-\beta_\nu(\xi-x)\varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos[\alpha_\nu(\xi-x)\varrho^{\frac{2m}{p}}] - \\ & \theta_\nu(p-1) J_0(r\varrho) \quad \xi \geq x \\ = & \frac{(-1)^m}{2p\pi} \sum_{\alpha_-} \int_0^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{1-\frac{2m}{p}}} e^{-\beta_\nu(x-\xi)\varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos[\alpha_\nu(x-\xi)\varrho^{\frac{2m}{p}}] + \\ & + \theta_\nu(p-1) J_0(r\varrho) \quad \xi \leq x. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable d'intégration indiqué par $\varrho^{\frac{2m}{p}} = \mu$. On trouve

$$(33) \quad \begin{aligned} A^{m-1}F = & \frac{(-1)^{m-1}}{4m\pi} \sum_{\alpha_+} \int_0^\infty e^{-\beta_\nu(\xi-x)\mu} \cos[\alpha_\nu(\xi-x)\mu] - \\ & - \theta_\nu(p-1) J_0(r\mu^{\frac{p}{2m}}) d\mu \quad \xi \geq x \\ = & \frac{(-1)^m}{4m\pi} \sum_{\alpha_-} \int_0^\infty e^{\beta_\nu(x-\xi)\mu} \cos[\alpha_\nu(x-\xi)\mu] + \\ & + \theta_\nu(p-1) J_0(r\mu^{\frac{p}{2m}}) d\mu \quad \xi \leq x. \end{aligned}$$

L'expression (4) nous apprend que la valeur absolue de la fonction J_0 , ainsi que celle d'une quelconque de ses dérivées, est toujours moindre que, ou égale à un. Donc, en remarquant que $\beta_\nu > 0$ dans l'expression qui vaut pour $\xi \geq x$, et que $\beta_\nu < 0$ dans l'autre expression, nous voyons que les intégrales de (33) sont absolument convergentes quand $x \neq \xi$, même quand $r=0$. Il en est de même des intégrales qu'on obtient en dérivant (33) un nombre quelconque de fois par rapport à ξ , x ou à r . Quand $x=\xi$, l'intégrale est convergente si $r>0$, mais les intégrales dérivées ne sont pas en général convergentes. On trouve la valeur de $A^{m-1}F$ pour $x=\xi$ en faisant usage de la formule connue *

$$(34) \quad \int_0^\infty \mu^{q-n-1} J_n(\lambda\mu) d\mu = 2^{q-n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}q\right)}{\Gamma\left(n+1-\frac{1}{2}q\right)} \lambda^{n-q} \quad 0 < q < n + \frac{3}{2}.$$

Faisons maintenant le changement de la variable d'intégration

$$\mu r^{\frac{p}{2m}} = \lambda,$$

et introduisons les notations

$$l = \frac{\xi-x}{r^{\frac{p}{2m}}}, \quad \theta = \frac{x-\xi}{r^{\frac{p}{2m}}}.$$

* Voir GRAY and MATHEWS. BESSEL Functions p 79.

Nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta^{m-1}F &= \frac{1}{r^p} f_{m-1}(t) \quad t > 0 \\ &= \frac{1}{r^p} g_{m-1}(\theta) \quad \theta \geq 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (35) \quad f_{m-1}(t) &= \frac{(-1)^{m-1}}{4m\pi} \sum_{\alpha \perp} \int_0^\infty e^{-\beta_\nu t \lambda} \cos[\alpha_\nu t \lambda - \theta_\nu(p-1)] J_0(\lambda^{\frac{p}{2m}}) d\lambda \\ g_{m-1}(\theta) &= \frac{(-1)^m}{4m\pi} \sum_{\alpha \perp} \int_0^\infty e^{\beta_\nu \theta \lambda} \cos[\alpha_\nu \theta \lambda + \theta_\nu(p-1)] J_0(\lambda^{\frac{p}{2m}}) d\lambda. \end{aligned}$$

Quand $t > 0$, $\theta > 0$, les intégrales ainsi que leurs dérivées sont absolument convergentes. Elles sont convergentes même quand $t=0$ ou $\theta=0$, mais les dérivées ne le sont pas en général. Comme nous l'avons vu plus haut, $f_{m-1}(t)$ et $g_{m-1}(\theta)$ sont des représentations d'une même fonction entière. Les expressions (35) sont favorables quand il s'agit de chercher des représentations asymptotiques de cette fonction entière et de ses dérivées, valables quand t ou θ tend vers l'infini.

Comme nous l'avons vu, les expressions (20) et (27) de $\Delta^{m-1}F$ ainsi que leurs dérivées sont convergentes quand $r > 0$. D'autre part, l'expression (33) est bien définie et continue même pour $r=0$, si toutefois $x \neq \xi$, et il en est de même de ses dérivées. Par conséquent, $\Delta^{m-1}F$ est régulière, sauf dans le point $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$. Elle est formée d'une puissance de r , multipliée par une fonction entière de t . Quand $m=1$, elle nous fournit la solution fondamentale elle-même.

6. Passons maintenant à la détermination de F dans le cas où $m > 1$. Nous avons trouvé

$$\begin{aligned} (36) \quad \Delta^{m-1}F &= \frac{(-1)^{m-1}}{4m\pi} \sum_{\alpha \perp} \int_0^\infty e^{-\beta_\nu(\xi-x)u} \cos[\alpha_\nu(\xi-x)u - \\ &\quad \theta_\nu(p-1)] J_0(r u^{\frac{p}{2m}}) du \quad \xi > x. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant $\Delta^{m-2}F$, c'est-à-dire une fonction telle que, si l'on y effectue l'opération

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

on trouve la fonction (36). On a

$$\Delta \left[-u^{-\frac{p}{m}} J_0(r u^{\frac{p}{2m}}) \right] = J_0(r u^{\frac{p}{2m}}).$$

Mais on voit que, si l'on remplace dans l'intégrale ci-dessus $J_0(r\mu^{2m})$ par la fonction

$$-\mu^{-\frac{p}{m}} J_0(r\mu^{2m}),$$

on trouve une expression qui n'a pas de sens, parce que $\frac{p}{m}$ est plus grand qu'un.

Pour donner un sens à cette intégrale, il faut ajouter un terme complémentaire qui doit, bien entendu, être une solution de notre équation aux dérivées partielles. De plus, ce terme sera tel qu'en effectuant sur lui l'opération Δ , on trouve zéro comme résultat. Partant de l'expression pour $\Delta^{m-2}F$ ainsi trouvée, on répète le procédé en cherchant $\Delta^{m-3}F$, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait trouvé F .

Pour former les termes complémentaires, nous considérons la suite de polynômes

$$p_{\nu,n}[(\xi-x)\mu] \quad n=2, 3, \dots, m,$$

de degrés égaux à ou plus petits que

$$(37) \quad \left[\frac{p}{m}(n-1) \right] - 1,$$

que l'on obtient en prenant dans la série de puissances de la fonction

$$e^{-\beta_{\nu}(\xi-x)\mu} \cos [\alpha_{\nu}(\xi-x)\mu - \theta_{\nu}(p-1)]$$

les sommes des premiers termes de degrés égaux à ou plus petits que (37). Ici l'on entend par $[a]$ la partie entière de a .

Remarquons, en passant, que les différences

$$A_{\nu,n} = e^{-\beta_{\nu}(\xi-x)\mu} \cos [\alpha_{\nu}(\xi-x)\mu - \theta_{\nu}(p-1)] - p_{\nu,n}[(\xi-x)\mu]$$

sont divisibles par

$$(38) \quad \mu^{\left[\frac{p}{m}(n-1) \right]}.$$

Considérons maintenant les polynômes

$$(39) \quad \begin{aligned} B_{\nu,1} &= 0, \\ B_{\nu,s}[(\xi-x)\mu, r\mu^{\frac{p}{2m}}] &= \sum_{n=0}^{s-2} (-1)^n p_{\nu,s-n}[(\xi-x)\mu] \frac{(r\mu^{\frac{p}{2m}})^{2n}}{2^{2n} (n)!^2} \quad s=2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Étant au plus de degrés $p-4$ en x et $2m-4$ en r , ce sont des solutions de l'équation (e), et on constate aisément que

$$(40) \quad \Delta B_{\nu,s} = -\mu^{\frac{p}{m}} B_{\nu,s-1}.$$

Nous allons démontrer que l'expression

$$(41) \quad \mu^{m-s} F = \frac{(-1)^{m-s}}{4m\pi} \sum_{\alpha=+}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\beta \mu (\xi-x)\mu} \cos [\alpha \mu (\xi-x)\mu - \theta \mu (p-1)] J_0(r \mu^{\frac{p}{2m}}) - \right. \\ \left. - B_{\nu, s} [(\xi-x)\mu, r \mu^{\frac{p}{2m}}] \right\} \mu^{-\frac{p}{m}(s-1)} d\mu \quad s=1, 2, \dots, m$$

possède les propriétés demandées.

Maintenant la difficulté par rapport à l'origine est disparue. En effet, considérons les coefficients des diverses puissances de r de la fonction entre accolades. Pour J_0 vaut le développement

$$(42) \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

On voit que, quand l'exposant de r est égal à ou plus grand que $2(s-1)$, le coefficient est divisible par $\mu^{\frac{p}{m}(s-1)}$. Les coefficients des autres puissances r^{2n} sont à des constantes près

$$A_{\nu, s-n} \cdot \mu^{\frac{p}{m}n}.$$

Donc, dans la fonction sous le signe intégral le coefficient de r^{2n} est divisible par

$$\mu \left[\frac{p}{m}(s-n-1) \right] - \frac{p}{m}(s-n-1),$$

et on voit que la condition d'intégrabilité est remplie à l'origine.

En examinant comment se comporte à l'infini le terme complémentaire, on trouve que là aussi la condition d'intégrabilité est remplie. Il suffit d'examiner la partie que l'on obtient en jetant dans le polynôme $p_{\nu, s-n}$ de (39) tous les termes, sauf celui de l'ordre le plus grand. Les termes de la fonction ainsi obtenue sont divisibles par

$$\mu \left[\frac{p}{m}(s-n-1) \right] - \frac{p}{m}(s-n-1) - 1 \quad n=0, 1, \dots, s-2.$$

En remarquant que p et m n'ont pas de facteur commun, on voit que

$$\frac{p}{m}(s-n-1)$$

n'est pas un nombre entier. Donc, notre proposition est démontrée.

On voit que l'intégrale dans (41), ainsi que ses dérivées, est absolument convergente pour $\xi > x$, même quand $r=0$. Quand $s > 1$, la convergence est absolue et uniforme, même dans des intervalles contenant $x=\xi$. Donc, quand $s > 1$, $\Delta^{m-s} F$ est bien définie et continue, même dans le point $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$.

L'expression (41) satisfait à l'équation (e). Si l'on effectue sur $\Delta^{m-s} F$ l'opération Δ , on trouve comme résultat l'expression (41) de $\Delta^{m-s+1} F$. De plus, nous avons pour $s=1$ l'expression (36). Donc, (41) possède les propriétés demandées.

L'expression trouvée ne vaut que pour $\xi \geq x$. Mais en opérant de la même manière sur l'expression de $A^{m-1}F$ donnée pour $\xi \leq x$, on trouve une représentation toute analogue qui vaut pour $\xi \leq x$.

En posant $\mu r^{\frac{2m}{p}} = \lambda$, on trouve

$$(43) \quad \begin{aligned} A^{m-s}F &= r^{\frac{2(s-1)}{p} - \frac{2m}{p}} f_{m-s}(t) \quad t \geq 0 \\ &= r^{\frac{2(s-1)}{p} - \frac{2m}{p}} g_{m-s}(\theta) \quad \theta \geq 0, \end{aligned}$$

où

$$(44) \quad \begin{aligned} f_{m-s}(t) &= \frac{(-1)^{m-s}}{4m\pi} \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \{ e^{-\beta \nu t \lambda} \cos [\alpha \nu t \lambda - \theta \nu (p-1) | J_0(\lambda^{\frac{p}{2m}}) - \\ &\quad - B_{\nu, s}[t \lambda, \lambda^{\frac{p}{2m}}] \} \lambda^{-\frac{p}{m}(s-1)} d\lambda. \end{aligned}$$

La fonction $g_{m-s}(\theta)$ est donnée par une expression toute analogue. Nous verrons plus loin que f_{m-s} et g_{m-s} sont des fonctions entières, même des représentations d'une même fonction entière.

7. Considérons maintenant l'intégrale double

$$(45) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha(\xi-x)} Q J_0(rQ) - Q E[\alpha(\xi-x), rQ]}{i^p \alpha^p + \alpha (-1)^m Q^{2m}} d\alpha dQ \quad m > 1,$$

où E est définie de la manière suivante

$$E = \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n s_{m-n} [\alpha(\xi-x)] \frac{(rQ)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad m > 1,$$

s_n étant les polynomes de degrés

$$\left[\frac{p}{m} (n-1) \right] - 1 \quad n = 2, 3, \dots, m,$$

obtenus en prenant dans la série de puissances de la fonction

$$e^{i\alpha(\xi-x)}$$

les sommes des premiers termes.

Ce n'est là autre chose que l'expression (F) , rendue convergente par l'addition d'un terme complémentaire.

On constate aisément qu'en évaluant l'intégrale par rapport à α , puis prenant la partie réelle, on obtient l'expression (41) de F .

La partie réelle de (45) sera par définition la solution fondamentale F quand $m > 1$. Nous allons montrer que (45) est absolument convergente. On

voit donc que la définition est en accord avec celle de $\mathcal{A}^{m-1}F$ donnée dans le paragraphe 2.

Pour examiner la convergence, nous écrivons le numérateur de la fonction sous le signe intégral de la manière suivante

$$e^{i\alpha(\xi-x)} \varrho \left(J_0(r\varrho) - \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \right) + \varrho \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n (e^{i\alpha(\xi-x)} - s_{m-n}[\alpha(\xi-x)]) \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2}.$$

Prenons d'abord l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(J_0(r\varrho) - \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \right) \frac{e^{i\alpha(\xi-x)}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}}.$$

En posant $\alpha = \varrho^p \beta$, on trouve qu'elle est, en valeur absolue, moindre que

$$\int_0^\infty d\varrho \varrho^{1-2m+\frac{2m}{p}} \left| J_0(r\varrho) - \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|i^p \beta^p + a(-1)^m|},$$

et on voit aisément que cette dernière expression est convergente.

Considérons maintenant l'expression

$$\sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{r^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\varrho (e^{i\alpha(\xi-x)} - s_{m-n}[\alpha(\xi-x)]) \frac{\varrho^{2n+1}}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}}.$$

En prenant au lieu de ϱ la variable d'intégration λ définie par $\varrho = \alpha^{\frac{p}{2m}} \lambda$, on trouve que l'intégrale de cette expression est, en valeur absolue, moindre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \alpha^{-p+\frac{p}{m}(n+1)} |e^{i\alpha(\xi-x)} - s_{m-n}[\alpha(\xi-x)]| \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^{2n+1}}{|i^p + a(-1)^m \lambda^{2m}|},$$

expression qui est bien convergente. On voit donc que (45) est absolument convergente.

8. On obtient une nouvelle représentation de F en évaluant l'intégrale par rapport à ϱ de l'expression (45).

1) Prenons d'abord l'équation (e_1).

En appliquant la notation

$$s_{m-n}(x) = e_1(x) + i e_2(x),$$

nous obtenons

$$F = \frac{(-1)^q}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ J_0(r\varrho) \cos \alpha(\xi-x) - \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n e_1[\alpha(\xi-x)] \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \right\} \frac{\varrho}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho.$$

En se servant de l'expression (15) de l'intégrale (10), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\varrho J_0(r\varrho) d\varrho}{\alpha^{2q} + \varrho^{2m}} = \frac{1}{m} \alpha^{-2q + \frac{2q}{m}} {}^m R_1(r\alpha^{\frac{q}{m}}),$$

la fonction $R_1(x)$ étant définie par

$$R_1(x) = \sum_{\varrho_+} [-\cos 2\theta_\nu^1 \cdot P_\nu(x) + \sin 2\theta_\nu^1 \cdot Q_\nu(x)].$$

Il faut encore évaluer l'intégrale

$$(46) \quad \int_0^\infty \frac{\varrho^{a_1} d\varrho}{\varrho^{2a_2} + \alpha^{2a_3}} \quad 2a_2 \geq a_1 + 2.$$

En prenant la variable d'intégration λ définie par

$$\lambda = \alpha - 2a_3 \varrho^{2a_2},$$

puis faisant usage de la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \mu \pi} \quad 0 < \mu < 1,$$

on trouve la valeur

$$(47) \quad \frac{\pi}{2a_2} \alpha^{-2a_3 + (a_1+1)\frac{a_3}{a_2}} \frac{1}{\sin(a_1+1) \frac{\pi}{2a_2}}.$$

A l'aide de ces expressions, on obtient

$$(48) \quad F = \frac{(-1)^q}{2m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_1(r\alpha^{\frac{q}{m}}) \cos \alpha(\xi - x) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{(r\alpha^{\frac{q}{m}})^{2n}}{2^{2n}(n)^2} \frac{e_1[\alpha(\xi - x)]}{\sin(n+1) \frac{\pi}{m}} \right\} \alpha^{-2q + \frac{2q}{m}} d\alpha.$$

II) Dans le cas de l'équation (e_2) , l'expression de F s'écrit

$$F = \frac{(-1)^q}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ J_0(r\varrho) [\varrho^{2m} \cos \alpha(\xi - x) + \alpha^{2q+1} \sin \alpha(\xi - x)] - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \{ \varrho^{2m} e_1[\alpha(\xi - x)] + \alpha^{2q+1} e_2[\alpha(\xi - x)] \} \frac{(r\varrho)^{2n}}{2^{2n}(n)^2} \frac{\varrho}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} d\alpha d\varrho. \right.$$

En faisant usage des égalités

$$\int_0^\infty \frac{\varrho^{2m+1} J_0(r\varrho) d\varrho}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} = \frac{1}{2m} \alpha^{-2q-1 + \frac{2q+1}{m}} R_2(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \\ \int_0^\infty \frac{\varrho J_0(r\varrho) d\varrho}{\alpha^{4q+2} + \varrho^{4m}} = \frac{1}{2m} \alpha^{-4q-2 + \frac{2q+1}{m}} R_3(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}),$$

où R_2 et R_3 sont définies par

$$R_2(x) = \sum_{\varrho_+} (-1)^\nu [\sin 2\theta_\nu^1 \cdot P_\nu(x) + \cos 2\theta_\nu^1 \cdot Q_\nu(x)]$$

$$R_3(x) = \sum_{\varrho_+} [-\cos 2\theta_\nu^1 \cdot P_\nu(x) + \sin 2\theta_\nu^1 \cdot Q_\nu(x)],$$

on trouve

$$(49) \quad F = \frac{(-1)^q}{4m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_2(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \cos \alpha(\xi - x) + R_3(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \sin \alpha(\xi - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}})^{2n}}{2^{2n}(n)^2} \left(\frac{e_1[\alpha(\xi - x)]}{\cos(n+1)\frac{\pi}{2m}} + \frac{e_2[\alpha(\xi - x)]}{\sin(n+1)\frac{\pi}{2m}} \right) \right\} \alpha^{-2q-1+\frac{2q+1}{m}} d\alpha.$$

En examinant si les intégrales (48) et (49) sont convergentes, il faut se servir de certaines propriétés des fonctions $R_i(x)$ que nous allons maintenant déduire. Montrons d'abord que la différence

$$(50) \quad R_1(x) - \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n)^2} \frac{1}{\sin(n+1)\frac{\pi}{m}}$$

est divisible par x^{2m-2} .

A l'aide des expressions (18), on trouve

$$R_1(x) = \sum_{\varrho_+} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\nu^1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2(n+1)\theta_\nu^1}{2^{2n}(n)^2} x^{2n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=m-1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2(n+1)\theta_\nu^1}{2^{2n}(n)^2} x^{2n} \left[\log \frac{x}{2} - \psi(n+1) \right] \right\}.$$

La limite inférieure de la dernière somme sera $m-1$, les sommes

$$\sum_{\varrho_+} \cos 2(n+1)\theta_\nu^1 \quad n \leq m-2$$

étant égales à zéro, ce qu'on vérifie facilement.

Évidemment, (50) est divisible par x^{2m-2} si

$$(51) \quad \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin(n+1)\frac{\pi}{m}} = \sum_{\varrho_+} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\nu^1 \right) \sin 2(n+1)\theta_\nu^1, \quad n < m-2.$$

On voit facilement que

$$\sum_{\varrho_+} \sin 2(n+1)\theta_\nu^1 = 0,$$

de sorte que (51) se réduit à

$$(52) \quad \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin(n+1)\frac{\pi}{m}} = - \sum_{\varrho_+} \theta_\nu^i \sin 2(n+1)\theta_\nu^i.$$

On peut vérifier cette dernière formule par des calculs élémentaires, mais nous allons suivre une autre voie.

Considérons dans le plan des $z (= \varrho + i\tau)$, déchiré par une coupure le long de l'axe réel positif de 0 à ∞ , le contour fermé λ composé de la manière suivante. Le bord supérieur de l'axe réel positif de ε au point ω , puis le cercle $|z| = \omega$ jusqu'à $\omega e^{2\pi i}$, ensuite le bord inférieur de l'axe réel positif jusqu'à $\varepsilon e^{2\pi i}$, et enfin le cercle $|z| = \varepsilon$.

Prenons maintenant l'intégrale

$$\int_{\lambda} \frac{z^{2n+1} \log z}{z^{2m} + 1} dz,$$

où $\log z$ aura sur le bord supérieur de l'axe réel positif la détermination réelle. En appliquant le théorème des résidus, puis faisant tendre ε vers zéro et ω vers $+\infty$, on obtient

$$(53) \quad \int_0^\infty \frac{\varrho^{2n+1} d\varrho}{\varrho^{2m} + 1} = - \frac{1}{2m} \sum_{\varrho_\nu} \theta_\nu^i \sin 2(n+1)\theta_\nu^i.$$

Ici la somme s'étend sur toutes les racines ϱ_ν . Cependant, on voit aisément que le côté droit peut être remplacé par

$$- \frac{1}{m} \sum_{\varrho_+} \theta_\nu^i \sin 2(n+1)\theta_\nu^i.$$

En se servant de l'expression (46), on obtient une autre expression de l'intégrale de (53), et en égalant les deux valeurs, on trouve l'égalité (52).

Les différences

$$(54) \quad R_2(x) = \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \frac{1}{\cos(n+1)\frac{\pi}{2m}}$$

et

$$(55) \quad R_3(x) = \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \frac{1}{\sin(n+1)\frac{\pi}{2m}}$$

aussi sont divisibles par x^{2m-2} .

En effet, comme

$$R_2(x) = \sum_{q=+} (-1)^q \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\nu^1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2(n+1)\theta_\nu^1}{2^{2n}(\underline{n})^2} x^{2n} - \\ - \sum_{n=m-1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2(n+1)\theta_\nu^1}{2^{2n}(\underline{n})^2} x^{2n} \left[\log_2 x - \Psi(n+1) \right],$$

il suffit de montrer que

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\cos(n+1)\frac{\pi}{2m}} = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\frac{\pi}{2} - \theta_\nu^1 \right) \cos 2(n+1)\theta_\nu^1 \quad n \leq m-2,$$

et cette égalité n'est autre chose que (51), où l'on a posé $2m$ au lieu de m et $n+m$ au lieu de n .

Quant à (55), nous remarquons que $R_3(x)$ s'obtient de $R_1(x)$ en remplaçant m par $2m$. En faisant usage de la formule (51) avec $2m$ au lieu de m , on trouve facilement que (55) est divisible par x^{2m-2} .

Remarquons que $R_1(x)$, $R_2(x)$ et leurs dérivées des $2m-3$ premiers ordres restent finies quand x décroît vers zéro. Il en est de même de $R_3(x)$ et de ses dérivées des $4m-3$ premiers ordres.

Nous pouvons maintenant étudier la convergence de (48), (49) et de leurs dérivées. Nous voyons sans difficulté que ces intégrales sont convergentes quand $r > 0$, même si $x = \xi$. F et certaines de ses dérivées, par exemple $\Delta^{m-s}F$, $s > 1$, sont convergentes même pour $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$.

En posant dans (48) et (49) $\alpha r^{\frac{2m}{p}} = \lambda$, on obtient les expressions suivantes de $f_0(t)$

$$f_0(t) = \frac{(-1)^q}{2m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_1(\lambda^{\frac{q}{m}}) \cos \lambda t - \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{\frac{2q}{m}n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \frac{e_1(\lambda t)}{\sin(n+1)\frac{\pi}{m}} \right\} \lambda^{-2q+\frac{2q}{m}} d\lambda \quad (e_1)$$

$$(56) \quad f_0(t) = \frac{(-1)^q}{4m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_2(\lambda^{\frac{2q+1}{2m}}) \cos \lambda t + R_3(\lambda^{\frac{2q+1}{2m}}) \sin \lambda t - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^{m-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{\frac{2q+1}{m}n}}{2^{2n}(\underline{n})^2} \left(\frac{e_1(\lambda t)}{\cos(n+1)\frac{\pi}{2m}} + \frac{e_2(\lambda t)}{\sin(n+1)\frac{\pi}{2m}} \right) \right\} \lambda^{-2q-1+\frac{2q+1}{m}} d\lambda \quad (e_2).$$

Ces intégrales sont des fonctions entières de t . On voit donc, en se reportant à l'expression (43), que $f_{m-s}(t)$ et $g_{m-s}(\theta)$ sont des représentations d'une même fonction entière,

En résumé, nous avons trouvé que F est de la forme

$$F = r^{2(m-1) \cdot \frac{2m}{p}} f_0(t),$$

où $f_0(t)$ est une fonction entière de t . En se rappelant les propriétés de l'expression (41) et de ses dérivées, on voit que F est régulière, sauf dans le point $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$.

9. Pour examiner comment se comporte à l'infini la fonction $f_{m-s}(t)$, faisons dans l'intégrale (44) la substitution $t\lambda = \mu$. Nous obtenons

$$f_{m-s}(t) = t^{\frac{p}{m}(s-1)-1} \frac{(-1)^{m-s}}{4m\pi} \sum_{\alpha_+} \int_0^\infty \left\{ e^{-\beta_\nu \mu} \cos [\alpha_\nu \mu - \theta_\nu(p-1)] J_0 \left[\left(\frac{\mu}{t} \right)^{\frac{p}{2m}} \right] - \right. \\ \left. - B_{\nu,s} \left[\mu, \left(\frac{\mu}{t} \right)^{\frac{p}{2m}} \right] \right\} \mu^{-\frac{p}{m}(s-1)} d\mu.$$

En faisant tendre t vers l'infini, on voit que

$$(57) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1-\frac{p}{m}(s-1)} f_{m-s}(t) = H_{m-s},$$

où H_{m-s} sont des constantes. On trouve de même

$$(57^1) \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \theta^{1-\frac{p}{m}(s-1)} g_{m-s}(\theta) = K_{m-s},$$

K_{m-s} étant des constantes.

Passons à l'étude des fonctions $\frac{\partial}{\partial r} A^{m-s} F$. D'abord, l'expression (41) donne

$$(58) \quad \frac{\partial}{\partial r} A^{m-s} F = \frac{(-1)^{m-s+1}}{4m\pi} \sum_{\alpha_+} \int_0^\infty \left\{ e^{-\beta_\nu(\xi-x)\mu} \cos [\alpha_\nu(\xi-x)\mu - \theta_\nu(p-1)] J_1(r\mu^{\frac{p}{2m}}) + \right. \\ \left. + B_{\nu,s}^{(01)}[(\xi-x)\mu, r\mu^{\frac{p}{2m}}] \right\} \mu^{-\frac{p}{m}(s-\frac{3}{2})} d\mu.$$

En faisant ici la substitution $\mu r^{\frac{p}{p}} = \lambda$, on trouve

$$(59) \quad \frac{\partial}{\partial r} A^{m-s} F = r^{2(s-\frac{3}{2})-\frac{2m}{p}} h_{m-s}(t) \\ = r^{2(s-\frac{3}{2})-\frac{2m}{p}} k_{m-s}(\theta),$$

où

$$(60) \quad h_{m-s}(t) = \frac{(-1)^{m-s+1}}{4m\pi} \sum_{\alpha_+} \int_0^\infty \left\{ e^{-\beta_\nu t\lambda} \cos [\alpha_\nu t\lambda - \theta_\nu(p-1)] J_1(\lambda^{\frac{p}{2m}}) + \right. \\ \left. + B_{\nu,s}^{(01)}[t\lambda, \lambda^{\frac{p}{2m}}] \right\} \lambda^{-\frac{p}{m}(s-\frac{3}{2})} d\lambda.$$

Une expression analogue vaut pour $k_{m-1}(\theta)$.

Une dérivation par rapport à r de l'expression (43) nous donne les relations suivantes

$$(61) \quad \begin{aligned} h_{m-s}(t) &= \left[2(s-1) - \frac{2m}{p} \right] f_{m-s}(t) - \frac{2m}{p} f'_{m-s}(t) \\ k_{m-s}(\theta) &= \left[2(s-1) - \frac{2m}{p} \right] g_{m-s}(\theta) - \frac{2m}{p} \theta g'_{m-s}(\theta). \end{aligned}$$

En faisant dans (60) le changement de variable $t\lambda = \mu$, on trouve comme ci-dessus la limite

$$(62) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1 - \frac{p}{m} \left(s - \frac{3}{2} \right)} h_{m-s}(t) = H'_{m-s},$$

et on a de même

$$(62^1) \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \theta^{1 - \frac{p}{m} \left(s - \frac{3}{2} \right)} k_{m-s}(\theta) = K'_{m-s},$$

H'_{m-s} et K'_{m-s} étant des constantes.

Dans la formule fondamentale figurent aussi les fonctions

$$(63) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^s F}{\partial x^s} &= (-1)^s r^{2(m-1) - \frac{2m}{p}(s+1)} f_0^{(s)}(t) \\ &= r^{2(m-1) - \frac{2m}{p}(s+1)} g_0^{(s)}(\theta) \end{aligned} \quad s \leq p-1,$$

où

$$(64) \quad \begin{aligned} f_0^{(s)}(t) &= \frac{1}{4m\pi} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \{ e^{-\beta_\nu t \lambda} \cos [\alpha_\nu t \lambda - \theta_\nu(p-s-1)] J_0(\lambda^{\frac{p}{2m}}) - \\ &\quad - B_{\nu,m}^{(s,0)}(t\lambda, \lambda^{\frac{p}{2m}}) \} \lambda^{-p+s} \lambda^{\frac{p}{m}} d\lambda. \end{aligned}$$

On trouve aisément les limites

$$(65) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{s - p + 1 + \frac{p}{m}} f_0^{(s)}(t) &= c_s \\ \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \theta^{s - p + 1 + \frac{p}{m}} g_0^{(s)}(\theta) &= c'_s, \end{aligned}$$

c_s et c'_s étant des constantes.

10. Étudions maintenant les solutions de la forme

$$(66) \quad v = r^h \varphi \left(\frac{\xi - x}{r^{\frac{p}{2m}}} \right) = r^h \varphi(t)$$

de l'équation adjointe

$$(m) \quad (-1)^p \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + a A^m v = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial^p v}{\partial x^p} = (-1)^p r^{h-2m} \frac{d^p q}{dt^p}.$$

De plus,

$$\Delta v = r^{h-2} \left[h^2 q + \left(\frac{4m^2}{p^2} - \frac{4mh}{p} \right) t q' + \frac{4m^2}{p^2} t^2 q'' \right]$$

ou, en désignant par D_h le symbole d'opération

$$D_h = \left[h^2 - \left(\frac{4m^2}{p^2} - \frac{4mh}{p} \right) t \frac{d}{dt} + \frac{4m^2}{p^2} t^2 \frac{d^2}{dt^2} \right],$$

$$\Delta v = r^{h-2} D_h q(t).$$

Puis

$$t^2 v = r^{h-4} D_{h-2} D_h q(t),$$

et enfin

$$A^m v = r^{h-2m} D_{h-2m+2} \dots D_{h-2} D_h q(t).$$

Introduisons encore, pour abréger, la notation

$$A_h^m = D_{h-2m+2} \dots D_{h-2} D_h.$$

Pour que l'expression (66) soit une solution de (m), il faut donc que $q(t)$ satisfasse à l'équation

$$(67) \quad \frac{d^p q}{dt^p} + a A_h^m q = 0.$$

Inversement, si q satisfait à cette équation différentielle ordinaire, l'expression (66) est une solution de (m).

L'équation (67) est linéaire. Comme les coefficients des dérivées d'ordre inférieur à p sont des fonctions entières de t , on voit que les intégrales n'ont d'autre singularité que $t = \infty$, qui est en général un point singulier essentiel. Donc, si nous avons trouvé une solution de la forme (66), alors la fonction $q(t)$ est une fonction entière.

Considérons les équations (67) qui correspondent aux fonctions

$$A_h^m = s F = r^{2(s-1) - \frac{2m}{p}} \int_m^s q(t) \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

On a ici

$$h = 2(s-1) - \frac{2m}{p}.$$

Le symbole A_h^m contient les opérations

$$D_{2(s-m) - \frac{2m}{p}}, \dots, D_{2(s-2) - \frac{2m}{p}}, D_{2(s-1) - \frac{2m}{p}}.$$

Entre ces opérations on trouve toujours l'opération

$$D_{-2m} = \left[\frac{4m^2}{p^2} + \frac{12m^2}{p^2} t \frac{d}{dt} + \frac{4m^2}{p^2} t^2 \frac{d^2}{dt^2} \right].$$

On constate bien aisément que dans $\mathcal{A}_h^m$ l'ordre des opérations D n'a pas d'importance, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathcal{A}_h^m = D_{-2m} \mathcal{A}',$$

où $\mathcal{A}'$ contient les autres opérations D . Donc, le second terme de l'équation (67) s'écrit

$$a \frac{4m^2}{p^2} \left(1 + 3t \frac{d}{dt} + t^2 \frac{d^2}{dt^2} \right) \mathcal{A}' f_{m-s} = a \frac{4m^2}{p^2} \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{d}{dt} + t \right) \mathcal{A}' f_{m-s}.$$

L'équation (67) devient

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d^{p-1} f_{m-s}}{dt^{p-1}} + a \frac{4m^2}{p^2} \left(t^2 \frac{d}{dt} + t \right) \mathcal{A}' f_{m-s} \right] = 0,$$

et on trouve en intégrant

$$(68) \quad \frac{d^{p-1} f_{m-s}}{dt^{p-1}} + a \frac{4m^2}{p^2} \left(t^2 \frac{d}{dt} + t \right) \mathcal{A}' f_{m-s} = C_{m-s},$$

où C_{m-s} est une constante.

Dans le cas $s=m$, on a $\mathcal{A}' f_0(t) = f_{m-1}(t)$, de sorte que l'équation (68) s'écrit

$$(69) \quad \frac{d^{p-1} f_0}{dt^{p-1}} + a \frac{2m}{p} t h_{m-1}(t) = C_0.$$

Or, d'après (65) et (62), on a quand t tend vers l'infini les égalités asymptotiques

$$f_0^{(p-1)}(t) \sim \frac{c_{p-1}}{t^{p/m}} \text{ et } t h_{m-1}(t) \sim \frac{H'_{m-1}}{t^{p/2m}},$$

de sorte que le membre gauche de (69) tend vers zéro. Nous en concluons que $C_0 = 0$, et on a la relation

$$(70) \quad \frac{d^{p-1} f_0}{dt^{p-1}} = a \frac{2m}{p} t h_{m-1}(t).$$

11. Dans ce qui suivra, nous avons besoin de savoir les valeurs des intégrales

$$(71) \quad I_1 = \int_0^\infty h_{m-1}(t) dt \text{ et } I_2 = \int_0^\infty k_{m-1}(\theta) d\theta.$$

Or, d'après (61)

$$h_{m-1}(t) = -\frac{2m}{p} \frac{d}{dt} \left[t f_{m-1}(t) \right], \quad k_{m-1}(\theta) = -\frac{2m}{p} \frac{d}{d\theta} \left[\theta g_{m-1}(\theta) \right].$$

Par conséquent,

$$I_1 = -\frac{2m}{p} \lim_{l \rightarrow \infty} t f_{m-1}(l), \quad I_2 = -\frac{2m}{p} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta g_{m-1}(\theta).$$

Considérons par exemple I_1 . En tenant compte de (57), on trouve

$$I_1 = \frac{(-1)^m}{2p\pi} \sum_{a_+} \int_0^\infty e^{-\beta_{a_+} \mu} \cos [\alpha_{a_+} \mu - \theta_{a_+} (p-1)] d\mu = \frac{(-1)^{m+1}}{2p\pi} \sum_{a_+} \cos p\theta_{a_+}.$$

Or,

$$\sum_{a_+} \cos p\theta_{a_+} = a (-1)^{m+1} N_+,$$

où N_+ désigne le nombre de racines a_+ à partie imaginaire positive. Par conséquent

$$(72) \quad I_1 = a \frac{N_+}{2p\pi}.$$

On trouve de même

$$(73) \quad I_2 = a^p \frac{N_-}{2p\pi}.$$

12. Ayant étudié la fonction F et ses dérivées, nous retournons à l'étude de la formule fondamentale (1). Supposons u régulière dans V et sur S et posons $v=F$. Nous aurons à considérer divers cas suivant la position du point $P(\xi, \eta, \zeta)$.

I) Supposons que P se trouve à l'extérieur de V et non sur S .

La fonction F étant singulière seulement dans le point P , v aussi est régulière dans V et sur S , et nous pouvons appliquer la formule (2).

II) Supposons maintenant que P est situé à l'intérieur de V ou sur S .

Nous isolons le point singulier P par le cylindre $C: (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2$ d'un rayon ϱ très petit. Puis, nous appliquons la formule (1) au volume limité par les surfaces Σ , σ_0 , σ_1 et C . Enfin faisons tendre ϱ vers zéro. Nous appelons γ_0 et γ_1 les petites portions de σ_0 et σ_1 que découpe le cylindre C .

A) P situé à l'intérieur de V .

1) Les intégrales étendues à $\sigma_0 - \gamma_0$, $\sigma_1 - \gamma_1$ et Σ sont évidemment convergentes et ont des limites quand ϱ tend vers zéro, les fonctions intégrées étant finies et continues.

2) Considérons maintenant le terme qui se rapporte au cylindre C . Ce terme s'écrit

$$-a \iint_C \left(F \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u - \frac{\partial F}{\partial n} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} F \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} F \cdot u \right) ds dx,$$

où les dérivées sont prises dans le sens de la normale intérieure. Prenons au

lieu de s la variable d'intégration ψ , en posant $ds = \varrho d\psi$. Le cylindre C coupe σ_0 et σ_1 le long de deux courbes, dont les équations soient $x = \xi_0(\psi, \varrho)$ et $x = \xi_1(\psi, \varrho)$. On peut toujours prendre ϱ si petit que l'on a

$$\xi_0(\psi, \varrho) < \xi < \xi_1(\psi, \varrho) \quad 0 < \psi < 2\pi,$$

inégalités qui valent pour chaque valeur plus petite de ϱ .

a) Examinons d'abord

$$-a \iint_C \varrho A^{m-s} F \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{s-1} u \, d\psi dx \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

L'expression (41) montre que $A^{m-s} F$, $s > 1$ est finie pour des valeurs finies des variables ξ , x et r . D'autre part,

$$r A^{m-1} F = r^{1-\frac{2m}{p}} f_{m-1}(t) \\ r^{1-\frac{2m}{p}} g_{m-1}(\theta),$$

et d'après (57) et (57¹) cette expression est finie, même quand t ou θ tend vers l'infini, et tend vers zéro avec r . Par conséquent, l'intégrale tend vers zéro.

b) Considérons maintenant les intégrales

$$a \iint_C \varrho \frac{\partial}{\partial n} A^{m-s} F \cdot A^{s-1} u \, d\psi dx \quad s = 2, 3, \dots, m.$$

Or, sur C on a $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, et d'après (58) les fonctions $\frac{\partial}{\partial r} A^{m-s} F$, $s \geq 2$ sont finies quand ξ , x et r sont finies. Donc, l'intégrale tend vers zéro avec ϱ .

c) Il reste à examiner le dernier terme

$$(74) \quad + a \iint_C \varrho u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} F \, d\psi dx$$

qui s'écrit

$$(75) \quad a \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\xi_0(\psi, \varrho)}^{\xi_1(\psi, \varrho)} dx u(x, \eta - \varrho \cos \psi, \xi - \varrho \sin \psi) \frac{1}{\varrho^{\frac{2m}{p}}} h_{m-1} \left(\frac{\xi - x}{\varrho^{\frac{2m}{p}}} \right) : \\ + a \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\xi}^{\xi_1(\psi, \varrho)} dx u(x, \eta - \varrho \cos \psi, \xi - \varrho \sin \psi) \frac{1}{\varrho^{\frac{2m}{p}}} k_{m-1} \left(\frac{x - \xi}{\varrho^{\frac{2m}{p}}} \right).$$

Si nous prenons t comme variable d'intégration, la première de ces intégrales peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 & a \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\xi_0(\psi, \varrho)} \frac{\varrho^{2m/p}}{\varrho^{2m}} dt \left[u(\xi - \varrho^p t, \eta - \varrho \cos \psi, \zeta - \varrho \sin \psi) - u(\xi, \eta, \zeta) \right] h_{m-1}(t) : \\
 & + a u(\xi, \eta, \zeta) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\xi_0(\psi, \varrho)} \frac{\varrho^{2m/p}}{\varrho^{2m}} dt h_{m-1}(t).
 \end{aligned}$$

Quand ϱ tend vers zéro, la première intégrale tend vers zéro. On le démontre aisément, en se servant de ce fait que

$$\int_0^\infty |h_{m-1}(t)| dt$$

est convergente, ce que montre (62). La limite de la dernière est

$$\frac{N_+}{p} u(\xi, \eta, \zeta).$$

On trouve de même que la deuxième intégrale de (75) tend vers

$$\frac{p - N_+}{p} u(\xi, \eta, \zeta),$$

de sorte que la somme donne

$$u(\xi, \eta, \zeta).$$

B) P sur S .

Quoique nous n'avons pas à en faire usage, il ne sera pas sans intérêt d'examiner l'intégrale (74) dans le cas où P se trouve sur S .

1) Si P est situé sur Σ , mais non sur les courbes l_0 et l_1 , courbes d'intersection de Σ par σ_0 et σ_1 , on trouve aisément la limite

$$\frac{1}{2} u(\xi, \eta, \zeta)$$

si la section de Σ par le plan $x = \xi$ a en P une tangente unique, tandis que cette quantité doit être multipliée par $\frac{\alpha}{\pi}$ si P est une *pointe*, α désignant l'angle des tangentes.

2) Étudions maintenant le cas où P est situé sur une des surfaces σ_0 et σ_1 , supposons par exemple sur σ_0 . De plus, nous supposons que P ne se trouve pas sur l_0 . Le plan $x = \xi$ partage le cylindre C en deux parties. Celle qui est située dans le domaine $x > \xi$ est limitée par les courbes $x = \xi_1(\psi, \varrho)$ et $x = \xi_0(\psi, \varrho)$, dont la dernière en général contient des portions de la courbe d'intersection de C par σ_0 . La partie de C où l'on a $x < \xi$ est en général composée de plusieurs parties. L'intégrale (74) s'écrit

$$(76) \quad a \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\xi_0(\psi, \varrho)}^{\xi_1(\psi, \varrho)} dx u(x, \eta - \varrho \cos \psi, \zeta - \varrho \sin \psi) \frac{1}{\varrho^p} k_{m-1} \left(\frac{x - \xi}{\varrho^p} \right) +$$

$$+ a \sum_n \int_{\psi_{1n}(\varrho)}^{\psi_{2n}(\varrho)} d\psi \int_{\xi_0(\psi, \varrho)}^{\xi} dx u(x, \eta - \varrho \cos \psi, \zeta - \varrho \sin \psi) \frac{1}{\varrho^p} h_{m-1} \left(\frac{\xi - x}{\varrho^p} \right).$$

En introduisant θ comme variable d'intégration, la première intégrale devient.

$$a \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\xi_0(\psi, \varrho) - \xi}{\varrho^p}}^{\frac{\xi_1(\psi, \varrho) - \xi}{\varrho^p}} d\theta u(\xi + \varrho^p \theta, \eta - \varrho \cos \psi, \zeta - \varrho \sin \psi) k_{m-1}(\theta),$$

La surface σ_0 ayant en chaque point un plan tangent, jamais parallèle à l'axe des x , la limite inférieure de l'intégrale par rapport à θ tend vers zéro avec ϱ^* . La limite supérieure, au contraire, devient $+\infty$. On démontre, comme dans le cas plus haut, que l'intégrale tend vers

$$a u(\xi, \eta, \zeta) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty d\theta k_{m-1}(\theta) = \frac{p - N_+}{p} u(\xi, \eta, \zeta).$$

Le second terme de (76) donne à la limite zéro. En effet, appelons $\xi_0(\varrho)$ la valeur la plus petite de la fonction $\xi_0(\psi, \varrho)$ et soit $|u| < M$. En procédant comme ci-dessus, on trouve que le terme en question est, en valeur absolue, moindre que

$$M \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\xi - \xi_0(\varrho)}{\varrho^p}} dt |h_{m-1}(t)|,$$

expression qui tend vers zéro avec ϱ .

On trouve de même les limites suivantes:

3) P sur σ_1 mais non sur l_1

$$\frac{N_+}{p} u(\xi, \eta, \zeta),$$

4) P sur l_0

$$\frac{p - N_-}{2p} u(\xi, \eta, \zeta),$$

Il suffirait de supposer satisfaite une condition de LIPSCHITZ $|\chi_0(y, z) - \chi_0(\eta, \zeta)| < kr'' \frac{2m}{p} < \alpha$.

5) P sur l_1

$$\frac{N_+}{2\rho} u(\xi, \eta, \zeta).$$

Si P est une *pointe* de la courbe d'intersection du cylindre $\mathcal{L}$ par le plan $x = \xi$, α désignant l'angle des tangentes, on doit multiplier les deux dernières expressions par $\frac{\alpha}{\pi}$.

En réunissant les résultats de l'étude ci-dessus, nous obtenons les formules

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad u(\eta, \xi, \zeta) \Big\} &= - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(F \cdot \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{p-2} u}{\partial x^{p-2}} + \dots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}} \cdot u \right) \cos x N d\sigma + \\ (\alpha_2) \quad 0 \Big\} &+ \alpha \iint_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \left(F \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u - \frac{\partial F}{\partial n} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} F \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} F \cdot u \right) ds dx. \end{aligned}$$

Ou suppose: Dans (α_1) P dans V ,
 Dans (α_2) P extérieur au volume V .

13. Dans la formule de GREEN obtenue ci-dessus figurent les valeurs sur σ_0 , σ_1 et $\mathcal{L}$ de u et d'un certain nombre de ses dérivées. Mais, ces quantités ne sont pas indépendantes. Quelles sont les quantités que l'on peut se donner arbitrairement? Pour savoir cela, nous allons considérer l'intégrale

$$(77) \quad \iiint_V u L(u) dx dy dz = 0,$$

étendue au volume V . Ici u désigne une solution régulière de (e). Les termes se transforment par des intégrations par parties répétées, et nous obtenons

si p est pair $p = 2q$

$$\begin{aligned} \iiint_V u \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} dx dy dz &= \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left[u \frac{\partial^{2q-1} u}{\partial x^{2q-1}} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{2q-2} u}{\partial x^{2q-2}} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} u}{\partial x^{q-1}} \frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right] \cos x N d\sigma + \\ (78) \quad &+ (-1)^q \iiint_V \left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right)^2 dx dy dz, \end{aligned}$$

si p est impair $p = 2q + 1$

$$\begin{aligned} \iiint_V u \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} dx dy dz &= \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left[u \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{2q-1} u}{\partial x^{q-1}} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} u}{\partial x^{q-1}} \frac{\partial^{q+1} u}{\partial x^{q+1}} \right] \cos x N d\sigma + \\ &+ (-1)^q \frac{1}{2} \iiint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right)^2 \cos x N d\sigma. \end{aligned}$$

De plus,

si m est pair $m = 2\mu$

$$(79) \quad \iiint_V u A^{2\mu} u \, dx dy dz = - \iint_{\Sigma + \sigma_0 + \sigma_1} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{2\mu-1} u - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot A^{2\mu-1} u + \dots + A^{\mu-1} u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu} u - \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu-1} u \cdot A^{\mu} u \right] ds dx + \iiint_V (A^{\mu} u)^2 dx dy dz,$$

si m est impair $m = 2\mu + 1$

$$\begin{aligned} \iiint_V u A^{2\mu+1} u \, dx dy dz = & - \iint_{\Sigma + \sigma_0 + \sigma_1} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{2\mu} u - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot A^{2\mu} u + \dots + A^{\mu-1} u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu+1} u - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu-1} u \cdot A^{\mu+1} u + A^{\mu} u \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu} u \right] ds dx - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} A^{\mu} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} A^{\mu} u \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Dans ce qui suivra nous aurons à considérer les suites de fonctions (σ) et (Σ) définies par

$$(\sigma) \quad u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial x^{q-1}}$$

ainsi que*.

$$(\Sigma) \quad \begin{aligned} & u, \frac{\partial u}{\partial n}, Au, \frac{\partial}{\partial n} Au, \dots, A^{\mu-1} u, \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu-1} u, A^{\mu} u & m \text{ impair } m = 2\mu + 1 \\ & u, \frac{\partial u}{\partial n}, Au, \frac{\partial}{\partial n} Au, \dots, A^{\mu-1} u, \frac{\partial}{\partial n} A^{\mu-1} u & m \text{ pair } m = 2\mu. \end{aligned}$$

1) Considérons d'abord le cas spécial où les surfaces σ_0 et σ_1 sont des portions des plans $x=c_0$ et $x=c_1$. Alors, dans les expressions (79) les intégrales étendues à σ_0 et σ_1 s'évanouissent.

1) Prenons d'abord l'équation (e_1) . Nous devons étudier l'intégrale

$$(80) \quad \iiint_V u \left[\frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} + (-1)^{q+1} A^m u \right] dx dy dz = 0.$$

Comme nous l'avons dit, m est impair.

Si les quantités (σ) disparaissent sur σ_0 et σ_1 et que de plus les m quantités (Σ) soient nulles sur Σ , l'équation transformée de (80) devient

$$(-1)^q \iiint_V \left[\left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} A^{\mu} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} A^{\mu} u \right)^2 \right] dx dy dz = 0.$$

Cela exige que

$$\frac{\partial^q u}{\partial x^q} = 0, \frac{\partial}{\partial y} A^{\mu} u = 0, \frac{\partial}{\partial z} A^{\mu} u = 0 \quad \text{dans } V.$$

* Il est probable que les théorèmes d'unicité que nous allons déduire valent encore si, au lieu des quantités (Σ) , on a les données: u ainsi que ses $m-1$ premières dérivées par rapport à n .

La première de ces égalités montre que l'on a dans V

$$u = a_0 + a_1 x + \dots + a_{q-1} x^{q-1},$$

où les a_i sont des fonctions de y et z . Or, sur σ_0 et σ_1

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = \dots = \frac{\partial^{q-1} u}{\partial x^{q-1}} = 0.$$

Donc

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{q-1} = 0.$$

Par conséquent, si l'on connaît les valeurs des quantités (σ) sur σ_0 et σ_1 , ainsi que (Σ) sur Σ , la solution u est complètement déterminée dans V .

2) Passons à l'équation (e_2) et considérons l'intégrale

$$\iiint_V u \left[\frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} + (-1)^{q-m} \Delta^m u \right] dx dy dz = 0.$$

Si les quantités (σ) disparaissent sur σ_0 et σ_1 et que (Σ) soient nulles sur Σ , l'égalité transformée devient

$$(81) \quad \begin{aligned} & (-1)^q \frac{1}{2} \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right)^2 \cos x N d\sigma + (-1)^{q-2\mu} \iiint_V (\Delta^\mu u)^2 dx dy dz = 0 \quad \text{si } m = 2\mu \\ & (-1)^q \frac{1}{2} \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q} \right)^2 \cos x N d\sigma + (-1)^{q-2\mu} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta^\mu u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta^\mu u \right)^2 \right] dx dy dz \text{ si } m = 2\mu + 1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que de plus

$$\frac{\partial^q u}{\partial x^q} = 0 \text{ sur } \sigma_0.$$

Puisque $\cos x N > 0$ sur σ_1 , toutes les intégrales de (81) ont le même signe. Nous en concluons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^q u}{\partial x^q} &= 0 \text{ sur } \sigma_1, \text{ et} & \text{si } m = 2\mu &: \Delta^\mu u = 0 \\ & & \text{si } m = 2\mu + 1: & \frac{\partial}{\partial y} \Delta^\mu u = \frac{\partial}{\partial z} \Delta^\mu u = 0 \end{aligned} \quad \text{dans } V.$$

Les dernières égalités nous permettent de conclure que

$$\frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} = 0 \text{ dans } V.$$

Donc, l'intégrale

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} dx dy dz = 0$$

est nulle. En transformant cette intégrale par des intégrations par parties, nous obtenons

$$\int_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^{2q-1} u}{\partial x^{2q-1}} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{\partial^q u}{\partial x^q} \frac{\partial^{q+1} u}{\partial x^{q+1}} \right) \cos x N d\sigma +$$

$$+ (-1)^q \iiint_V \left(\frac{\partial^{q+1} u}{\partial x^{q+1}} \right)^2 dx dy dz = 0.$$

Comme les quantités

$$(\sigma) \text{ et } \frac{\partial^q u}{\partial x^q}$$

sont nulles sur σ_0 et σ_1 , l'expression ci-dessus montre que

$$\frac{\partial^{q+1} u}{\partial x^{q+1}} = 0 \text{ dans } V.$$

La fonction u est donc un polynome en x

$$u = a_0 + a_1 x + \dots + a_q x^q,$$

mais, puisque sur σ_0 et σ_1

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = \dots = \frac{\partial^q u}{\partial x^q} = 0,$$

on tire que

$$a_0 = a_1 = \dots = a_q = 0.$$

Donc, une solution u est complètement déterminée si l'on connaît les quantités

$$(\sigma) \text{ sur } \sigma_0 \text{ et } \sigma_1, \frac{\partial^q u}{\partial x^q} \text{ sur } \sigma_0, \text{ et } (\Sigma) \text{ sur } \Sigma.$$

II) Passons maintenant au cas général. Il faut montrer que la supposition que (σ) soient nulles sur σ_0 et σ_1 entraîne que les fonctions (Σ) sont nulles, de sorte que dans les expressions (79) les intégrales étendues à σ_0 et σ_1 s'évanouissent, et maintenant l'étude se poursuit comme dans le cas précédent. Nous ne nous occuperons que des cas $m=1$ et $m=2$.

1) Supposons que $m=1$. Alors la quantité

$$(\Sigma) = u$$

est certainement nulle sur σ_0 et σ_1 si (σ) sont nulles.

2) Quand $m=2$, on a $p \geq 5$, de sorte que la suite (σ) contient les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$. Il s'agit de montrer que

$$(\Sigma) = u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}$$

sont nulles. Or, si q est une fonction qui est nulle sur σ_0 et σ_1 , on montre aisément que

$$\frac{\partial q}{\partial x} : \frac{\partial q}{\partial y} : \frac{\partial q}{\partial z} = \cos x N : \cos y N : \cos z N.$$

Appliquons cela à la fonction u . En observant que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, nous trouvons

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \sigma_0 \text{ et } \sigma_1.$$

On peut appliquer la même méthode pour démontrer l'unicité avec d'autres données. Ainsi, par exemple, on constate bien aisément qu'une solution de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

dont nous nous occuperons plus loin, est uniquement déterminée si l'on connaît

$$u \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ sur } \sigma_0 \text{ et } \sigma_1 \text{ ainsi que } u \text{ sur } \Sigma.$$

II. Sur l'équation $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

14. Pour pouvoir approfondir les études, il faut maintenant laisser le cas général et passer à des équations spéciales. En premier lieu, nous allons nous occuper du cas $p=3$, $m=1$, $a=+1$, c'est-à-dire de l'équation

$$(I) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Comme application de la théorie précédente, formons la solution fondamentale de cette équation. On voit que (I) est de la forme (e₂), et on a $q=1$.

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 4, on aura à chercher les racines de l'équation en ϱ

$$\varrho^4 + \alpha^6 = 0.$$

Elles s'écrivent

$$\varrho_r = e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} r} \alpha^{\frac{3}{2}} \quad r = 0, \dots, 3.$$

Il y en a deux à partie imaginaire positive, savoir,

$$\varrho_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \alpha^{\frac{3}{2}} \text{ et } \varrho_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \alpha^{\frac{3}{2}}.$$

A ces racines correspondent les fonctions

$$P_0(x) = P_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}xy} \cos \frac{1}{\sqrt{2}}xy}{\sqrt{y^2 - 1}} dy,$$

ainsi que

$$Q_0(x) = -Q_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}xy} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}xy}{\sqrt{y^2 - 1}} dy,$$

et la formule (27) du paragraphe 4 nous donne l'expression suivante de F

$$(1) \quad F = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty da \int_1^\infty d\gamma \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2\gamma} \cos\left[\frac{1}{2}a^2\gamma - a(\xi - x)\right]}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}.$$

Dans le cas actuel, t et θ s'écrivent

$$t = \frac{\xi - x}{r^{2/3}}, \quad \theta = \frac{x - \xi}{r^{2/3}}.$$

La formule (29) du paragraphe 4 nous donne pour $f_0(t)$

$$(2) \quad f_0(t) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \int_1^\infty d\gamma \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\gamma} \cos\left[\frac{1}{2}\lambda^2\gamma - \lambda t\right]}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}.$$

En cherchant l'expression de F donnée dans le paragraphe 5, il faut d'abord considérer les racines de l'équation en α

$$\alpha^3 - i\alpha^2 = 0.$$

Ces racines s'écrivent

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\alpha^3, \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\alpha^3 \text{ et } -i\alpha^3.$$

Les angles θ_ν y appartenants sont

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ et } 0.$$

Aux deux premières racines, qui ont une partie imaginaire positive, correspondent les deux fonctions

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi-x)\mu} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi-x)\mu - \frac{4\pi}{3}\right] \text{ et } e^{-\frac{1}{2}(\xi-x)\mu} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi-x)\mu + \frac{8\pi}{3}\right],$$

dont la somme s'écrit

$$2e^{-\frac{1}{2}(\xi-x)\mu} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi-x)\mu + \frac{2\pi}{3}\right].$$

Par conséquent, la formule (33) du paragraphe 5 donne pour F

$$(3) \quad F = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\xi-x)\mu} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi-x)\mu + \frac{2\pi}{3}\right] J_0(r\mu^2) d\mu \quad \xi \geq x \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-(x-\xi)\mu} J_0(r\mu^2) d\mu \quad \xi \leq x.$$

La substitution $\mu r^3 = \lambda$ donne

$$(4) \quad F = r^{-\frac{2}{3}} f_0(t) \quad t > 0$$

$$r^{-\frac{2}{3}} g_0(\theta) \quad \theta \geq 0,$$

où

$$(5) \quad f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} t \lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \lambda + \frac{2\pi}{3}\right) J_0(\lambda^2) d\lambda,$$

$$g_0(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\theta \lambda} J_0(\lambda^2) d\lambda.$$

En prenant la dérivée par rapport à r de (4), on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r^{-\frac{5}{3}} h_0(t)$$

$$= r^{-\frac{5}{3}} k_0(\theta),$$

où

$$(6) \quad h_0(t) = -\frac{2}{3} |f_0(t) + t f'_0(t)|$$

$$k_0(\theta) = -\frac{2}{3} [g_0(\theta) + \theta g'_0(\theta)].$$

Pour les fonctions $h_0(t)$ et $k_0(\theta)$ on obtient les expressions

$$(7) \quad h_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} t \lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \lambda + \frac{2\pi}{3}\right) \lambda^2 J_1(\lambda^2) d\lambda$$

$$k_0(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\theta \lambda} \lambda^2 J_1(\lambda^2) d\lambda.$$

Remarquons, en passant, que les deux intégrales que nous avons évalué dans le paragraphe 11 ont les valeurs

$$\int_0^\infty h_0(t) dt = \frac{1}{3\pi} \text{ et } \int_0^\infty k_0(\theta) d\theta = \frac{1}{6\pi}.$$

L'équation différentielle (70) du paragraphe 10, à laquelle satisfait $f_0(t)$, s'écrit

$$(8) \quad \frac{d^2 f_0}{dt^2} + \frac{4}{9} t^2 \frac{df_0}{dt} + \frac{4}{9} t f_0 = 0.$$

A l'aide de cette équation, on trouve aisément le développement en série de puissances de la fonction $f_0(t)$

$$f_0(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$$

D'abord, les deux premiers coefficients sont donnés par *

$$a_0 = g_0(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda^2) d\lambda = -\frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})},$$

$$a_1 = g'_0(0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{3\sqrt{4}\pi} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

Or, en posant $x = \frac{1}{3}$ dans la formule connue

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2x)\sqrt{\pi} 2^{-2x+1},$$

on trouve

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})}.$$

Par conséquent,

$$a_0 = -\frac{1}{6\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})}, \quad a_1 = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})}.$$

En posant $t=0$ dans (8), on trouve que $a_2=0$. Les autres coefficients se calculent à l'aide de la relation

$$a_{n+3} = -\frac{4}{9} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} a_n.$$

On voit que

$$a_{3n+2} = 0 \quad n=0, 1, \dots$$

Examinons maintenant plus étroitement l'équation (8). En posant

$$f_0(t) = e^{-\frac{2}{27}t^3} \cdot q(t),$$

on trouve pour $q(t)$ l'équation

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{4}{81} t^4 q = 0.$$

Pour intégrer cette équation, nous posons

$$q(t) = \sqrt[3]{t} \psi(t),$$

d'où suit

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\psi}{dt} - \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{4}{81} t^4 \right) \psi = 0.$$

La substitution

$$\lambda = \frac{2}{27} t^3.$$

* Voir la formule (34) du paragraphe 5.

donne l'équation en λ

$$\frac{d^2\psi}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\psi}{d\lambda} - \left(1 + \frac{1}{36\lambda^2}\right)\psi = 0.$$

C'est l'équation des fonctions de BESSEL d'un argument imaginaire avec l'index $n = \frac{1}{6}$. On a donc

$$\psi(\lambda) = A \dot{I}_{\frac{1}{6}}(\lambda) + B \dot{I}_{-\frac{1}{6}}(\lambda),$$

les fonctions $\dot{I}_\nu$ et $\dot{I}_{-\nu}$ étant définies par

$$\begin{aligned} \dot{I}_\nu(\lambda) &= i^{-\nu} J_\nu(i\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{\nu+2s} \frac{\lambda^{\nu+2s}}{\Gamma(s) \Gamma(\nu+1+s)} \\ \dot{I}_{-\nu}(\lambda) &= i^\nu J_{-\nu}(i\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-\nu+2s} \frac{\lambda^{-\nu+2s}}{\Gamma(s) \Gamma(-\nu+1+s)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f_0(t) = \sqrt{t} e^{-\frac{2}{27}t^3} \left[A \dot{I}_{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) + B \dot{I}_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) \right].$$

On trouve aisément que dans le cas de la fonction $f_0(t)$ les constantes A et B ont les valeurs

$$A = B = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi},$$

de sorte que l'on a

$$(9) \quad f_0(t) = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi} \sqrt{t} e^{-\frac{2}{27}t^3} \left[I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) + I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) \right].$$

La fonction $g_0(\theta)$ s'écrit

$$g_0(\theta) = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi} \sqrt{\theta} e^{\frac{2}{27}\theta^3} \left[I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) - I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) \right].$$

Introduisons la fonction $H_{\frac{1}{6}}(x)$ définie par *

$$H_{\frac{1}{6}}(x) = \frac{i}{\sin \nu\pi} \left(e^{-\nu\pi i} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x) \right).$$

On trouve que

$$(10) \quad I_{\frac{1}{6}}(x) - I_{-\frac{1}{6}}(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{7\pi i}{12}} H_{\frac{1}{6}}(ix).$$

Donc

* N. NIELSEN. Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, p 17.

$$(11) \quad g_0(\theta) = -\frac{1}{12\sqrt{3}\pi} \sqrt{\theta} e^{\frac{2}{27}\theta^3} e^{\frac{7\pi i}{12}} H_1^{\frac{1}{6}}\left(i\frac{2}{27}\theta^3\right).$$

En cherchant la fonction $g'_0(\theta)$, on doit faire usage de la formule *

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu H_1^\nu(cx) \right] = cx^\nu H_1^{\nu-1}(cx),$$

ce qui donne

$$g'_0(\theta) = -\frac{1}{54\sqrt{3}\pi} \theta^{\frac{5}{2}} e^{\frac{2}{27}\theta^3} \left[e^{\frac{7\pi i}{12}} H_1^{\frac{1}{6}}\left(i\frac{2}{27}\theta^3\right) - e^{\frac{\pi i}{12}} H_1^{-\frac{5}{6}}\left(i\frac{2}{27}\theta^3\right) \right].$$

Donc, en partant de (11), on obtient pour $k_0(\theta)$

$$(12) \quad k_0(\theta) = -\frac{1}{81\sqrt{3}\pi} \theta^{\frac{7}{2}} e^{\frac{2}{27}\theta^3} \left[e^{\frac{7\pi i}{12}} H_1^{\frac{1}{6}}\left(i\frac{2}{27}\theta^3\right) \left(1 + \frac{9}{2\theta^3}\right) - e^{\frac{\pi i}{12}} H_1^{-\frac{5}{6}}\left(i\frac{2}{27}\theta^3\right) \right].$$

Or, en tenant compte de la relation

$$e^{\frac{\pi i}{12}} H_1^{-\frac{5}{6}}(ix) = -2[I_5(x) - I_{-\frac{5}{6}}(x)]$$

ainsi que de l'égalité (10), cette expression s'écrit

$$k_0(\theta) = -\frac{2}{81\sqrt{3}\pi} \theta^{\frac{7}{2}} e^{\frac{2}{27}\theta^3} \left\{ \left[I_1\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) - I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) \right] \left(1 + \frac{9}{2\theta^3}\right) - \left[I_5\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) - I_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{2}{27}\theta^3\right) \right] \right\}.$$

d'où l'expression suivante pour $h_0(t)$

$$(13) \quad h_0(t) = -\frac{2}{81\sqrt{3}\pi} t^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{2}{27}t^3} \left\{ \left[I_1\left(\frac{2}{27}t^3\right) + I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) \right] \left(1 - \frac{9}{2t^3}\right) - \left[I_5\left(\frac{2}{27}t^3\right) - I_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{2}{27}t^3\right) \right] \right\}.$$

Il faut maintenant étudier les propriétés des fonctions $f_0(t)$, $g_0(\theta)$, $h_0(t)$ et $k_0(\theta)$ pour t ou θ infini. En introduisant dans les expressions (9), (11), (13) et (12) les développements asymptotiques **

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{1(8x)} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2(8x)^2} + \dots \right]$$

et

$$i^{\nu+1} H_1^\nu(ix) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{1(8x)} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2(8x)^2} + \dots \right],$$

on trouve des représentations asymptotiques de ces fonctions, mais on les obtient plus facilement en partant des expressions (5) et (7).

* N. NIELSEN loc. cit. p. 28.

** Voir SCHAFHEITLIN, loc. cit.

Posons dans la dernière formule de (5) $\theta\lambda = \mu$. Nous aurons

$$g_0(\theta) = -\frac{1}{4\pi\theta} \int_0^\infty e^{-\mu} J_0 \left[\left(\frac{\mu}{\theta} \right)^2 \right] d\mu,$$

ou, en introduisant le développement en série de puissances de $J_0 \left[\left(\frac{\mu}{\theta} \right)^2 \right]$,

$$(14) \quad g_0(\theta) = -\frac{1}{4\pi\theta} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \left(1 - \frac{\mu^3}{2^2\theta^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\mu^{3(n-1)}}{2^{2(n-1)}(n-1)^2\theta^{3(n-1)}} + R, \right.$$

où

$$R = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{2n} \frac{1}{\theta^{3n+1}} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{3n} J_0^{(2n)} \left[\vartheta \left(\frac{\mu}{\theta} \right)^2 \right] d\mu, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Continuée infiniment, cette série est divergente. Étudions le reste R . Nous avons besoin d'une certaine inégalité, satisfaite par $|J_0^{(2n)}(x)|$, que nous allons maintenant établir. Considérons l'expression suivante pour $J_0^{(2n)}(x)$

$$J_0^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) \sin^{2n} \varphi d\varphi.$$

On en conclut

$$J_0^{(2n)}(x) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi d\varphi.$$

Or, on a

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi.$$

Les deux intégrales à droit ont la même valeur, savoir,

$$\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n} = \frac{\pi}{2} \frac{2n}{2^{2n} (n)^2}.$$

Donc,

$$J_0^{(2n)}(x) \leq \frac{2n}{2^{2n} (n)^2}.$$

A l'aide de cette inégalité, on trouve la limitation

$$R \leq \frac{1}{4\pi 2^{2n} (n)^2 \theta^{3n+1}} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{3n} d\mu.$$

On voit que la valeur absolue de R est moindre que celle du premier terme négligé dans la série (14). La fonction $g_0(\theta)$ est donc représentée asymptotiquement par la série, et on a l'égalité.

$$(15) \quad g_0(\theta) \sim -\frac{1}{2^2\pi\theta} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{3n}{2^{2n-2}\pi(n)^2\theta^{3n-1}} + \dots,$$

valable quand θ tend vers $+\infty$.

Passons à l'étude de la fonction $k_0(\theta)$. La substitution $\theta\lambda = \mu$ donne

$$k_0(\theta) = \frac{1}{4\pi\theta} \int_0^\infty e^{-\mu} \left(\frac{\mu}{\theta}\right)^2 J_1\left[\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^2\right] d\mu.$$

Introduisons le développement de la fonction de BESSEL. Nous aurons

$$k_0(\theta) = \frac{1}{2^3\pi\theta^4} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^3 d\mu - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}\pi \underline{n-1} \underline{n} \theta^{3n+1}} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{3n} d\mu + \dots$$

Examinons le reste

$$R = \frac{1}{4\pi \underline{2n+1}} \frac{1}{\theta^{3n+4}} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{3(n+1)} J_1^{2(n+1)}\left[\vartheta \left(\frac{\mu}{\theta}\right)^2\right] d\mu, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

En dérivant $2n+1$ fois l'expression

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi,$$

on trouve

$$J_1^{(2n+1)}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) \sin^{2n+2} \varphi \, d\varphi.$$

On a donc l'inégalité

$$|J_1^{(2n+1)}(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n+2} \varphi \, d\varphi = \frac{2n+1}{2^{2n+1} \underline{n} \underline{n+1}},$$

d'où suit

$$R < \frac{1}{2^{2n+3}\pi \underline{n} \underline{n+1}} \frac{1}{\theta^{3n+4}} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{3(n+1)} d\mu.$$

Le reste est donc moindre en valeur absolue que la valeur absolue du premier terme négligé. On a donc

$$(16) \quad k_0(\theta) \sim \frac{3}{2^3\pi\theta^4} - \frac{6}{2^5\pi \underline{2}\theta^7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 3n}{2^{2n+1}\pi \underline{n-1} \underline{n} \theta^{3n+1}} - \dots$$

Les deux séries (15) et (16) appartiennent à la classe que M. STIELTJES a nommé séries de première espèce. Celles que l'on trouve pour $f_0(t)$ et $h_0(t)$ sont au contraire des séries de seconde espèce. Elles s'écrivent

$$(17) \quad f_0(t) \sim -\frac{1}{2\pi t} - \frac{3}{2^3\pi t^4} - \dots - \frac{3n}{2^{2n+1}\pi(\underline{n})^2 t^{3n+1}} - \dots$$

et

$$(18) \quad h_0(t) \sim -\frac{3}{2^2\pi t^4} - \frac{2 \cdot 6}{2^4\pi(\underline{2})^2 t^7} - \dots - \frac{n \cdot 3n}{2^{2n}\pi(\underline{n})^2 t^{3n+1}} - \dots$$

Les termes de ces deux séries ont tous le même signe. De plus, les valeurs absolues des termes généraux croissent vers l'infini quand n tend vers $+\infty$.

Il n'y a plus de relation entre la valeur absolue du reste et celle du premier terme négligé. Mais, toutefois, l'étude du reste nous apprend que les séries sont asymptotiques dans le sens de M. POINCARÉ.

On obtient de la même manière les représentations

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{2}{3} th'_0(t) + \frac{8}{3} h_0(t) &\sim \frac{45}{\pi t^7} \\ \frac{2}{3} \theta k'_0(\theta) + \frac{8}{3} k_0(\theta) &\sim \frac{45}{2\pi\theta^7}, \end{aligned}$$

dont nous aurons à faire usage dans ce qui suivra.

15. A l'aide de la fonction F , on obtient les formules (α_1) et (α_2) du paragraphe **12**, lesquelles s'écrivent

$$(20) \quad \mu \left(\begin{smallmatrix} \xi, \eta, z \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = - \int \int_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} u \right) \cos x N d\sigma + \int \int_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \left(F \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial F}{\partial n} u \right) ds dx.$$

Considérons les intégrales qui contiennent des dérivées par rapport à x . Il suffit d'étudier celles qui sont étendues à la surface σ_0 . Ces intégrales ont la forme

$$U_{0i} = \int \int_{\sigma_0} q \frac{\partial^{i-1} F}{\partial x^{i-1}} \cos x N d\sigma \quad i = 1, 2, 3,$$

q étant une fonction continue de y et z . On a

$$U_{01} = - \int \int_{\sigma_0} q \frac{1}{r^{2/3}} f_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz, \quad U_{02} = \int \int_{\sigma_0} q \frac{1}{r^{4/3}} f'_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz.$$

En faisant usage des formules (6) et (8), on trouve pour U_{03}

$$U_{03} = - \frac{2}{3} \int \int_{\sigma_0} q \frac{1}{r^2} \frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz.$$

Supposons que P ne se trouve pas sur σ_0 . Alors les fonctions intégrées et leurs dérivées sont finies et continues, même quand r devient égal à zéro. On le voit en faisant usage des représentations asymptotiques des fonctions de t . Du reste, c'est une conséquence du fait que F est régulière, sauf dans P . Par suite, les intégrales U_{0i} sont finies, et il en est de même de leurs dérivées, que l'on peut obtenir en effectuant les dérivations sous les signes intégrals. Évidemment, U_{0i} sont des solutions de l'équation (I) où, bien entendu, on a changé x, y, z en ξ, η, ζ .

Supposons maintenant que P est sur σ_0 . Considérons par exemple U_{03}

$$U_{03} = - \frac{2}{3} \int \int_{\sigma_0} \frac{1}{r^2} \frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} h_0 \left(\frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz.$$

La surface σ_0 ayant en chaque point un plan tangent déterminé, jamais parallèle à l'axe des x , l'expression

$$\frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}}$$

est de l'ordre $r^{1/3}$. La fonction sous le signe intégral est donc de l'ordre $r^{-5/3}$, et on trouve, en prenant des coordonnées polaires, que l'intégrale est finie. On trouve de même que les autres intégrales U_{0i} sont convergentes.

Les intégrales U_{0i} sont des fonctions continues de ξ , η et ζ quand P ne se trouve pas sur la surface σ_0 . U_{01} et U_{02} sont continues même sur σ_0 , tandis que U_{03} satisfait à une certaine équation de discontinuité, que nous allons maintenant chercher.

Cherchons la limite de U_{03} quand P s'approche d'un point de σ_0 qui n'est pas sur l_0 , tout en étant intérieur à la surface S . Pour cela, nous écrivons l'intégrale de la manière suivante

$$\begin{aligned} U_{03} = & -\frac{2}{3} \iint_{\sigma_0} \varphi \frac{1}{r^2} \frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}} h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}} \right) dy dz - \\ & -\frac{2}{3} \iint_{\sigma_0} \varphi \frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{8/3}} h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz - \\ & -\frac{2}{3} \iint_{\sigma_0} \varphi \frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{8/3}} \left[h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) - h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}} \right) \right] dy dz. \end{aligned}$$

Dans la troisième intégrale, l'expression entre crochets est égale à

$$\frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} h_0' \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}} + \frac{\partial \chi_0(\eta, \zeta)}{\partial \chi_0(y, z)} \frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) \quad 0 < \vartheta < 1.$$

La fonction $th_0'(t)$ étant toujours finie, ce qui montre les représentations

$$h_0'(t) \sim \frac{3}{\pi t^5}, \quad k_0'(\theta) \sim -\frac{3}{\pi \theta^5},$$

valables quand t et θ tendent vers $+\infty$, on trouve que la fonction sous le signe intégral est du même ordre que $r^{-5/3}$. L'intégrale est, par conséquent, toujours finie. La limite de cette intégrale est zéro, grâce au facteur $\xi - \chi_0(\eta, \zeta)$. La deuxième intégrale reste finie. Dans la première, nous prenons des coordonnées polaires en posant

$$\begin{aligned} \eta &= y + r \cos \alpha \\ \zeta &= z + r \sin \alpha \end{aligned}$$

et obtenons

$$(21) \quad \iint_{\sigma_0} dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho(\alpha)} d\alpha dr + \sum_i \int_{\eta_{0i}}^{\eta_{1i}} \int_{\varrho_{0i}(\alpha)}^{\varrho_{1i}(\alpha)} d\alpha dr.$$

La partie qui vient de la première intégrale à droit s'écrit

$$-\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\varrho(\alpha)}{r^2/3}} dr q(\eta - r \cos \alpha, \zeta - r \sin \alpha) \frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{5/3}} h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}} \right) \quad \varrho(\alpha) > 0.$$

Introduisons, au lieu de r , la nouvelle variable d'intégration t définie par

$$t = \frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{r^{2/3}}.$$

Nous obtenons

$$-\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\varrho(\alpha)}{|\varrho(\alpha)|^{2/3}}} dt \left[q \left[\eta - \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{t} \right)^{3/2} \cos \alpha, \zeta - \left(\frac{\xi - \chi_0(\eta, \zeta)}{t} \right)^{3/2} \sin \alpha \right] h_0(t) \right].$$

En se rappelant que q est continue, on trouve aisément la limite

$$-q(\eta, \zeta) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} dt h_0(t) = -\frac{2}{3} q(\eta, \zeta).$$

On démontre de même que la partie de la limite qui vient de la somme dans (21) est égale à zéro. Donc, en résumé, nous obtenons la limite

$$-\frac{2}{3} q(\eta, \zeta) = -\frac{2}{3} \int_{\sigma_0} \left(\int_0^q \frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{5/3}} \right) h_0 \left(\frac{\chi_0(\eta, \zeta) - \chi_0(y, z)}{r^{2/3}} \right) dy dz,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{2}{3} q(\eta, \zeta) = (U_{03})_{\xi = \chi_0(\eta, \zeta)}.$$

On trouve de même que la fonction

$$U_{13} = \iint_{\sigma_1} \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos x N d\sigma$$

tend vers

$$(22) \quad -\frac{1}{3} q(\eta, \zeta) + (U_{13})_{\xi = \chi_1(\eta, \zeta)}$$

quand P tend vers un point de σ_1 qui n'est pas sur l_1 , tout en restant à l'intérieur de S .

Dans le cas où $\varphi(y, z)$ s'évanouit sur Σ , U_{03} est continue sur l_0 . En effet, la troisième intégrale de l'expression ci-dessus de U_{03} tend évidemment vers zéro quand P s'approche d'un point de l_0 . Il en est de même de la première. On le voit en découpant de σ_0 une petite portion δ autour du point en question, et en remarquant que la partie de l'intégrale qui vient de δ est très petite, q étant continue et nulle sur Σ . La limite de la deuxième étant $(U_{03})_{\xi = \chi_0(\eta, \zeta)}$, la fonction est continue.

On trouve de même que U_{13} est continue sur l_1 si la fonction $\eta(y, z)$ est égale à zéro sur Σ .

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale

$$V = \int_{\Sigma} \Phi(s, x) \frac{\partial F}{\partial n} ds dx,$$

où Φ est une fonction continue, intégrale qui s'écrit

$$V = - \int_0^s \int_{l_0(s)}^{l_1(s)} \Phi(s, x) \frac{\cos(r, n)}{r} \frac{1}{r^{2/3}} h_0 \left(\frac{\xi - x}{r^{2/3}} \right) ds dx,$$

$x=l_0(s)$ et $x=l_1(s)$ étant les équations des courbes l_0 et l_1 .

Si P n'est pas sur Σ , la fonction sous le signe intégral est finie et continue. Donc, l'intégrale V est convergente, et représente une fonction continue de ξ , η et ζ . Il en est de même de ses dérivées. Évidemment, V est une solution de l'équation (I). On démontre aisément que l'intégrale est finie même quand P se trouve sur Σ .

Examinons comment se comporte l'intégrale V quand le point P tend vers un point de Σ qui ne se trouve pas sur l_0 ou l_1 . Prenons, au lieu de x , la nouvelle variable d'intégration t

$$t = \frac{\xi - x}{r^{2/3}}.$$

Nous aurons

$$V = - \int_0^s \mu_P(s) \frac{\cos(r, n)}{r} ds,$$

où la fonction $\mu_P(s)$ est définie par

$$\mu_P(s) = \int_{\frac{\xi - l_1(s)}{r^{2/3}}}^{\frac{\xi - l_0(s)}{r^{2/3}}} \Phi(s, \xi - tr^{2/3}) h_0(t) dt.$$

Quand r n'est pas égal à zéro, cette expression est bien déterminée, et fonction continue de ξ , η , ζ et s . Quand P tend vers un point Q de Σ qui se trouve sur la génératrice $s=\sigma$, mais qui n'est pas sur l_0 ou l_1 , et que de plus, en même temps, s tend vers σ , r devient égal à zéro. Alors, $\mu_P(s)$ a une limite bien déterminée

$$(23) \quad \mu_Q(\sigma) = \Phi(\sigma, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t) dt = \frac{1}{2\pi} \Phi(\sigma, \xi).$$

Pour étudier la discontinuité de V , nous allons examiner l'expression

$$(24) \quad W = - \int_0^s [\mu_P(s) - \mu_Q(\sigma)] \frac{\cos(r, n)}{r} ds,$$

Nous allons montrer que W est une fonction continue de ξ, η, ζ dans l'espace avoisinant le point Q . Prenons δ et ϱ si petits que, pour les valeurs de s de l'intervalle

$$(25) \quad \sigma - \delta \leq s \leq \sigma + \delta,$$

on a, quand P se trouve dans une sphère de rayon ϱ avec Q comme centre,

$$\mu_P(s) - \mu_Q(\sigma) < \varepsilon.$$

Partageons l'intégrale (24) en deux parties, l'une relative aux valeurs (25) de s , et l'autre relative au reste de l'intervalle d'intégration. La première intégrale est, en valeur absolue, moindre que $2\pi\varepsilon$, quelle que soit la position de P . La seconde est une fonction continue de ξ, η, ζ quand P se trouve suffisamment près de Q . On peut donc trouver un nombre $\varrho_0 < \delta$ tel que, dans une sphère de rayon ϱ_0 avec Q comme centre, la différence des valeurs que prend W en deux points quelconques soit moindre que ε , ce que démontre la continuité.

Nous désignons par V_Q la valeur de V au point Q , par V_{iQ} la limite de V quand P tend vers Q en étant à l'intérieur du cylindre obtenu en prolongeant Σ indéfiniment dans les deux sens, et enfin par V_{eQ} la limite de V quand P tend vers Q en étant à l'extérieur de ce cylindre. En tenant compte de la continuité de W , on trouve deux relations entre V_Q, V_{iQ} et V_{eQ} en écrivant que la limite de W , quand P tend vers Q en étant intérieur ou extérieur au cylindre, est égale à sa valeur au point Q .

I) Si Q est un point ordinaire de la courbe d'intersection de Σ par le plan $x = \xi$, ces relations sont

$$\begin{aligned} V_{iQ} + 2\pi\mu_Q(\sigma) &= V_Q + \pi\mu_Q(\sigma) \\ V_{eQ} &= V_Q + \pi\mu_Q(\sigma), \end{aligned}$$

ou, si nous introduisons la valeur (23) de $\mu_Q(\sigma)$,

$$(26) \quad \begin{aligned} V_{iQ} - V_Q &= \frac{1}{2} \Phi(\sigma, \xi) \\ V_{eQ} - V_Q &= \frac{1}{2} \Phi(\sigma, \xi). \end{aligned}$$

II) Si au contraire Q est une *pointe*, α désignant l'angle des tangentes, on trouve les relations

$$\begin{aligned} V_{iQ} + 2\pi\mu_Q(\sigma) &= V_Q + \alpha\mu_Q(\sigma) \\ V_{eQ} &= V_Q + \alpha\mu_Q(\sigma), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(27) \quad \begin{aligned} V_{iQ} - V_Q &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 1 \right) \Phi(\sigma, \xi) \\ V_{eQ} - V_Q &= \frac{\alpha}{2\pi} \Phi(\sigma, \xi). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où Q se trouve sur l_0 ou l_1 , et supposons que $\Phi(s, x)$ est égale à zéro sur l_0 et l_1 . Dans ces conditions, la limite $\mu_Q(\sigma)$ est égale à zéro de sorte que $V_{iQ} = V_{eQ} = V_Q$. Donc, dans ce cas V est continue.

16. Passons maintenant au problème d'intégration de l'équation (I). D'après le paragraphe **13**, il s'agit de trouver une solution u qui satisfait aux conditions suivantes

$$(28) \quad \begin{aligned} u &= \psi_{00}(\eta, \zeta) & \text{sur } \sigma_0, \quad u &= \psi_{10}(\eta, \zeta) & \text{sur } \sigma_1 \text{ et } u = \psi(\sigma, \xi) & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \psi'_{01}(\eta, \zeta) \end{aligned}$$

ψ_{uv} et ψ étant des fonctions données que nous supposons continues. La fonction ψ sera supposée une fois dérivable par rapport à ξ , la dérivée étant continue. Évidemment, les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ doivent se raccorder le long des courbes l_0 et l_1 .

Dans ce qui suivra, nous n'allons pas considérer le cas général. En premier lieu nous allons supposer que Σ est formée d'une partie du prisme à section rectangulaire défini par

$$(29) \quad \begin{aligned} y &= 0, \quad y = b_0 \\ z &= 0, \quad z = c_0. \end{aligned}$$

Plus loin, nous allons encore faire des suppositions restrictives.

17. Dans la formule de GREEN (20), qui nous donne la valeur de u au point P , quand ce point se trouve à l'intérieur de la surface S , figurent les valeurs sur σ_0 , σ_1 et Σ de u d'un certain nombre de ses dérivées. Mais, comme nous l'avons dit, on ne peut se donner arbitrairement que les quantités (28). Dans certains cas, on peut, à l'aide de la méthode des images, éliminer une ou plusieurs des autres fonctions. Ainsi, nous allons montrer que dans le cas du prisme définie ci-dessus, on peut éliminer la fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma$.

Pour cela, nous formons l'équation (20) pour les points

$$\xi, 2\mu b_0 + \eta, 2\nu c_0 + \zeta; \quad \xi, 2\mu b_0 - \eta, 2\nu c_0 - \zeta \quad \mu, \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm n \pm \dots$$

ainsi que pour les points

$$\xi, 2\mu b_0 - \eta, 2\nu c_0 - \zeta; \quad \xi, 2\mu b_0 + \eta, 2\nu c_0 + \zeta \quad \mu, \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm n \pm \dots$$

et ajoutons toutes ces équations, après avoir changé le signe de celles qui se rapportent aux derniers points.

Parmi les points, il n'y en a qu'un qui se trouve à l'intérieur de S , savoir, (ξ, η, ζ) . Par conséquent, nous obtenons

$$(30) \quad u(\xi, \eta, \zeta) = - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(G_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial G_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} u \right) \cos x N d\sigma + \iint_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G_0}{\partial n} u \right) ds dx,$$

la fonction G_0 étant définie par

$$(31) \quad G_0 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} [F(\xi - x, 2\mu b_0 + \eta - y, 2\nu c_0 + \zeta - z) - \\ - F(\xi - x, 2\mu b_0 - \eta - y, 2\nu c_0 + \zeta - z) - F(\xi - x, 2\mu b_0 + \eta - y, 2\nu c_0 - \zeta - z) + \\ + F(\xi - x, 2\mu b_0 - \eta - y, 2\nu c_0 - \zeta - z)].$$

Cependant, il faut démontrer que les séries qui représentent G_0 et ses dérivées sont uniformément convergentes.

Étudions donc la convergence de la série (31). A cet effet, nous développons les diverses fonctions F dans le terme général, en appliquant la formule de TAYLOR sous sa forme finie. Tous les termes qui contiennent F et ses dérivées du premier ordre se détruisent, et on trouve que le terme général peut s'écrire *

$$(32) \quad \frac{(\eta - y)^2}{2} F^{(20)}(2\mu b_0 + \vartheta_1(\eta - y), 2\nu c_0 + \vartheta_1(\zeta - z)) + (\eta - y)(\zeta - z) \cdot F^{(11)}(2\mu b_0 + \vartheta_1(\eta - y), 2\nu c_0 + \vartheta_1(\zeta - z)) + \frac{(\zeta - z)^2}{2} \cdot \\ \cdot F^{(02)}(2\mu b_0 + \vartheta_1(\eta - y), 2\nu c_0 + \vartheta_1(\zeta - z)) + \dots \quad 0 < \vartheta_i < 1$$

Il suffit pour notre but de trouver l'ordre de grandeur des fonctions

$$F^{(20)}(2\mu b_0, 2\nu c_0), F^{(11)}(2\mu b_0, 2\nu c_0), F^{(02)}(2\mu b_0, 2\nu c_0).$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{1}{r^{8/3}} h_0 - \frac{(\eta - y)^2}{r^{14/3}} \left(\frac{2}{3} t h'_0 + \frac{8}{3} h_0 \right) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{(\eta - y)(\zeta - z)}{r^{14/3}} \left(\frac{2}{3} t h'_0 + \frac{8}{3} h_0 \right) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{r^{8/3}} h_0 - \frac{(\zeta - z)^2}{r^{14/3}} \left(\frac{2}{3} t h'_0 + \frac{8}{3} h_0 \right).$$

Les fonctions de t qui figurent dans ces expressions sont des fonctions entières qui ont des limites finies pour $t = \pm \infty$, comme montrent les représentations asymptotiques (16), (18) et (19). On en tire les inégalités

$$(33) \quad |F^{(20)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)|, |F^{(11)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)|, |F^{(02)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)| < \\ < \frac{C}{(4\mu^2 b_0^2 + 4\nu^2 c_0^2)^{1/3}} \quad \mu^2 + \nu^2 > 0,$$

où C est une constante convenable.

A l'aide de ces inégalités, on démontre aisément que la série est absolument et uniformément convergente. La fonction F étant fonction paire de $\eta - y$ ainsi que de $\zeta - z$, nous n'avons besoin d'examiner que la partie de la série (31)

* Nous n'écrivons pas l'argument $\xi - x$, qui est le même dans toutes les fonctions F .

où μ et ν sont positifs ou nuls. Considérons l'expression (32) du terme général. Prenons par exemple le premier terme, qui s'écrit, à un facteur près qui est indépendant de μ et de ν ,

$$F^{(20)}(2\mu b_0 + A, 2\nu c_0 + B),$$

où A et B ne dépendent pas de μ ni de ν . D'après (33), la valeur absolue de ce terme est inférieure à

$$\frac{C}{[(2\mu b_0 + A)^2 + (2\nu c_0 + B)^2]^{4/3}}.$$

Si A et B sont positifs, cette expression est inférieure à

$$(34) \quad \frac{C}{(4\mu^2 b_0^2 + 4\nu^2 c_0^2)^{4/3}}.$$

Supposons, au contraire, que A ou B est négatif. En posant

$$\mu = \alpha + \mu_0, \\ \nu = \beta + \nu_0,$$

où les constantes positives α et β sont convenablement choisies, on est ramené au cas précédent.

Or, la série avec le terme général (34) est bien convergente*. Nous en concluons que la série proposée est convergente. On voit que la limitation est indépendante des variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, et cela même si x ou ξ devient infini, si seulement y, z, η et ζ restent finies. Donc, la convergence est uniforme.

Les séries qui représentent les dérivées $\frac{\partial G_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}, \frac{\partial G_0}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_0}{\partial z}$ se traitent de la même manière. Elles sont absolument et uniformément convergentes.

On voit bien aisément que la fonction G_0 est nulle sur Σ , c'est-à-dire pour $y=0, y=b_0, z=0, z=c_0$. Nous obtenons donc finalement la formule

$$(35) \quad u(\xi, \eta, \zeta) = - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(G_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial G_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} u \right) \cos x N d\sigma + \\ + \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G_0}{\partial n} u \right) ds dx - \iint_{\Sigma} \frac{\partial G_0}{\partial n} u ds dx.$$

18. Dans le cas où σ_0 est formée d'une portion du plan $x=0$, on peut encore éliminer la fonction $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{\sigma_0}$ qui figure dans la formule (35). Cependant,

* Voir par exemple: E. PICARD. Traité d'analyse. t. I p. 291.

il faut se servir d'une méthode des images généralisée, en recourant à des images imaginaires*.

Formons pour ce but une solution G_1 qui est nulle sur Σ et égale à G_0 sur $\sigma_0(x=0)$. De plus, G_1 sera régulière, sauf peut-être pour $y=\eta$, $z=\zeta$. Mais, sur la demi-ligne $y=\eta$, $z=\zeta$, $x \geq 0$ G_1 , ainsi que $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial z}$, sera finie.

Posons

$$G = G_0 - G_1.$$

A l'aide de cette fonction, nous obtenons la formule

$$(36) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = & \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} u \right) \cos x N d\sigma - \iint_{\sigma_1} G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos x N d\sigma + \\ & + \iint_{\sigma_1} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} u \right) ds dx - \iint_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n} u ds dx. \end{aligned}$$

Montrons que G_1 est donnée par l'expression

$$(37) \quad G_1 = -e^{\frac{2\pi i}{3}} G_0(\xi e^{\frac{2\pi i}{3}} - x) - e^{-\frac{2\pi i}{3}} G_0(\xi e^{-\frac{2\pi i}{3}} - x),$$

où dans la fonction G_0 nous n'avons écrit que le premier argument.

D'abord, la série qui représente G_1 est uniformément convergente. Pour le montrer, nous allons faire voir que les dérivées secondes par rapport à η et ζ de la fonction

$$F_1(\eta - y, \zeta - z) = -e^{\frac{2\pi i}{3}} F(\xi e^{\frac{2\pi i}{3}} - x) - e^{-\frac{2\pi i}{3}} F(\xi e^{-\frac{2\pi i}{3}} - x)$$

satisfont aux inégalités

$$|F_1^{(20)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)|, |F_1^{(11)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)|, |F_1^{(02)}(2\mu b_0, 2\nu c_0)| < \frac{C}{(4\mu^2 b_0^2 + 4\nu^2 c_0^2)^{3/2}} \quad (\mu^2 + \nu^2 > 0),$$

où C est une constante qui ne dépend de μ , ν . Pour des valeurs finies de x et ξ , ce n'est là qu'une conséquence de ce fait que les fonctions h_0 et $\frac{2}{3}th'_0 + \frac{8}{3}h_0$ sont entières

Cependant, les inégalités sont valables même quand x ou ξ devient infini, de sorte que C peut être choisi indépendant de ces variables. En effet, en faisant usage de la dernière formule de (3), nous trouvons

$$(38) \quad F_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(x+\frac{\xi}{2})\mu} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\mu + \frac{2\pi}{3}\right) J_0(r\mu^{3/2}) d\mu.$$

* On doit cette généralisation à M. H. BLOCK. (Voir: Arkiv för Matematik, t. 8, n°23, ainsi que Comptes rendus, t. 161, p. 170, 1915.)

En partant de cette expression, on obtient

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 \eta} = \frac{1}{r^{8/3}} \left(-\frac{1}{2\pi} I_1 + \frac{(\eta - y)^2}{2\pi r^2} I_2 \right), \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{r^{8/3}} \frac{(\eta - y)(\xi - z)}{2\pi r^2} I_2,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} = \frac{1}{r^{8/3}} \left(-\frac{1}{2\pi} I_1 + \frac{(\xi - z)^2}{2\pi r^2} I_2 \right),$$

où

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\left(t_1 + \frac{t_2}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \lambda + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \lambda^{3/2} J_1(\lambda^{3/2}) d\lambda$$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-\left(t_1 + \frac{t_2}{2}\right)\lambda} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \lambda + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \lambda^3 J_2(\lambda^{3/2}) d\lambda,$$

les variables t_1 et t_2 étant définies par

$$t_1 = x r^{-\frac{2}{3}}, \quad t_2 = \xi r^{-\frac{2}{3}}.$$

En posant $\left(t_1 + \frac{t_2}{2}\right)\lambda = \mu$, on trouve que I_1 et I_2 sont finies quand t_1 ou t_2 tend vers l'infini. Donc, notre proposition est démontrée.

Ce point établi, la démonstration s'achève comme dans le cas de la série (31).

On démontre de même que les séries qui représentent $\frac{\partial G_1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ sont uniformément convergentes.

Évidemment, G_1 satisfait à l'équation (I). De plus, $G_1 = 0$ sur Σ et, en considérant l'expression (38) de F_1 , on voit que $G_1 = G_0$ sur σ_0 ($x = 0$). Enfin, G_1 est régulière pour $\xi > 0$, et G_1 , $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ sont finies pour $y = \eta$, $z = \zeta$, $x \geq 0$ quand $\xi > 0$. L'expression (37) possède donc les propriétés demandées, et nous avons

$$G = G_0(\xi - x) + e^{\frac{2\pi}{3}i} G_0(\xi e^{\frac{2\pi}{3}i} - x) + e^{-\frac{2\pi}{3}i} G_0(\xi e^{-\frac{2\pi}{3}i} - x).$$

Si la surface σ_1 s'éloigne infiniment, il arrive sous certaines conditions, que nous n'allons pas déduire ici, que les intégrales étendues à σ_1 de la formule (36) tendent vers zéro, les autres intégrales restant convergentes, et nous avons, en appliquant les notations (28), la formule

$$(39) \quad u(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\sigma_0} \left(\psi_{01} \frac{\partial G}{\partial x} - \psi_{00} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \cos x N d\sigma - \iint_{\Sigma} \Psi \frac{\partial G}{\partial n} ds dx,$$

qui résout le problème d'intégration dans le cas de la surface σ_0, Σ . La fonction G doit être considérée comme la fonction de GREEN de cette surface.

19. Supposons maintenant que σ_0 est infiniment éloignée tandis que σ_1 se

trouve à distance finie. Alors, le problème consiste à chercher une solution qui satisfait aux conditions *

$$u = \varphi_{10}(\eta, \zeta) \text{ sur } \sigma_1, \quad u = \Psi(\sigma, \xi) \text{ sur } \Sigma.$$

Nous supposons Ψ telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^A |\Psi| dx,$$

où A est un nombre fini, est convergente.

Montrons d'abord que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $u=0$ sur Σ . Pour le faire voir, nous allons étudier l'expression

$$(40) \quad - \iint_{\Sigma_1} \Psi(s, x) \frac{\partial G_0}{\partial n} ds dx,$$

où G_0 est la fonction définie par (31). La surface Σ , est formée de la partie du prisme (29) où $x < A$, A étant un nombre fini tel que

$$l_1(s) < A \quad 0 \leq s \leq s.$$

Les valeurs de Ψ pour $l_1(s) < x \leq A$ sont arbitraires, mais telles que Ψ sera continue sur Σ_1 . Évidemment, l'intégrale est convergente.

Nous allons montrer que quand P tend vers un point Q de Σ , l'intégrale (40) prend la valeur en ce point de la fonction donnée Ψ .

Prenons par exemple le cas où le point Q se trouve sur la surface $y=0$, mais non sur $z=0$ ou $z=c_0$. Dans la série qui représente $\frac{\partial G_0}{\partial n}$, il faut considérer à part les termes qui correspondent aux points

$$(\xi, \eta, \zeta) \text{ et } (\xi, -\eta, \zeta).$$

Les intégrales dans l'expression (40) qui viennent de ces termes s'écrivent

$$i_1 = - \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) ds dx,$$

$$i_2 = \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, -\eta - y, \zeta - z) ds dx.$$

Le point (ξ, η, ζ) étant à l'intérieur de S , et le point $(\xi, -\eta, \zeta)$ à l'extérieur de S , on voit, en se reportant aux formules (26), que i_1 et i_2 tendent vers

$$\frac{1}{2} \Psi(\sigma, \xi) + i_{1Q} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \Psi(\sigma, \xi) + i_{2Q},$$

et, comme $i_{1Q} = -i_{2Q}$, la somme devient

$$\Psi(\sigma, \xi).$$

* Le théorème d'unicité n'étant prouvé que dans le cas d'un domaine fini, il faut une étude particulier pour savoir si cette solution est unique.

Le reste de la série $\frac{\partial G_0}{\partial n}$ est continue. La partie de l'expression (40) qui en vient est une fonction continue. On trouve aisément que cette partie devient nulle. Nous avons donc prouvé la justesse de l'énoncé dans le cas spécial traité.

Considérons maintenant le cas où Q est sur une des lignes d'intersection de deux des plans dont est formée Σ , supposons par exemple sur la ligne $y=0$, $z=0$. Il y a dans ce cas quatre points à considérer à part,

$$(\xi, \eta, \zeta), (\xi, -\eta, -\zeta), (\xi, -\eta, \zeta), (\xi, \eta, -\zeta),$$

dont seulement le premier se trouve, à l'intérieur de S . Les intégrales dans (40) qui correspondent à ces points s'écrivent

$$(41) \quad \begin{aligned} i_1 &= - \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) ds dx & i_2 &= - \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, -\eta - y, -\zeta - z) ds dx \\ i_3 &= \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, -\eta - y, \zeta - z) ds dx & i_4 &= \iint_{\Sigma_1} \Psi \frac{\partial}{\partial n} F(\xi - x, \eta - y, -\zeta - z) ds dx. \end{aligned}$$

En se reportant aux formules (27), on trouve les limites suivantes de ces intégrales quand P tend vers Q

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \Psi(\sigma, \xi) + i_{1Q} & & - \frac{1}{4} \Psi(\sigma, \xi) + i_{2Q} \\ \frac{1}{4} \Psi(\sigma, \xi) + i_{3Q} & & + \frac{1}{4} \Psi(\sigma, \xi) + i_{4Q}, \end{aligned}$$

et comme on a $i_{1Q} = i_{2Q} = -i_{3Q} = -i_{4Q}$, la somme donne

$$\Psi(\sigma, \xi).$$

En supprimant dans l'expression (40) les termes (41), on obtient une fonction continue. On trouve aisément que la valeur de cette fonction au point Q est nulle. Donc, même dans le cas actuel, l'expression (40) tend vers $\Psi(\sigma, \xi)$.

On voit donc que le problème se réduit au cas spécial où $u=0$ sur Σ par l'addition de l'expression (40).

Cherchons maintenant à résoudre notre problème par l'expression

$$(42) \quad u = - \iint_{\sigma_1} \varphi_{10} \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} \cos x N d\sigma.$$

On démontre aisément que G_0 , ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x , s'évanouit quand P s'approche d'un point de Σ qui n'est pas sur l_1 , le point (x, y, z) se trouvant sur σ_1 . Par suite, l'intégrale (42) tend vers zéro.

Quand P s'approche d'un point de l_1 , et que de plus la fonction φ_{10} est continue et égale à zéro sur Σ , (42) tend vers zéro. Évidemment, nous n'avons besoin d'examiner que les intégrales qui viennent des termes de la série $\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}$

qui correspondent à P et celles de ses images qui viennent coïncider avec P sur Σ . D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 15, ces intégrales sont continues, et on voit aisément qu'elles se détruisent.

Cherchons la limite de (42) quand P tend vers un point de σ_1 qui ne se trouve pas sur l_1 . Ce n'est que le terme

$$-\iint_{\sigma_1} \varphi_{10} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos x N d\sigma$$

qui est discontinu. En tenant compte de (22), on trouve donc que u prend la valeur

$$\frac{1}{3} \varphi_{10}(\eta, \xi) - \iint_{\sigma_1} \varphi_{10} \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} \right)_{\xi=\chi_1(\eta, \xi)} \cos x N d\sigma.$$

Quand σ_1 est une portion du plan $x=c$, l'intégrale de cette expression est nulle. Dans ce cas, notre problème est résolu, si nous prenons

$$\varphi_{10}(\eta, \xi) = 3\varphi_{10}(\eta, \xi).$$

En général, nous aurons pour φ_{10} une équation intégrale

$$(43) \quad \varphi_{10}(\eta, \xi) - \iint_{\sigma_1} K(\eta, \xi; y, z) \varphi_{10}(y, z) dy dz = f(\eta, \xi),$$

où

$$f(\eta, \xi) = 3\varphi_{10}(\eta, \xi), \quad K(\eta, \xi; y, z) = 3 \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} \right)_{\substack{\xi=\chi_1(\eta, \xi) \\ x=\chi_1(y, z)}}.$$

On voit que chaque cas φ_{10} est continue, et nulle sur Σ .

L'équation (43) est une équation intégrale de FREDHOLM avec le noyau K fini, sauf pour $y=\eta$, $z=\xi$. On ne peut pas appliquer directement la méthode de M. FREDHOLM, le noyau devenant infini d'un ordre trop grand pour $y=\eta$, $z=\xi$. Cependant, il est à présumer que quelqu'un des noyaux itérés est infini d'un ordre convenable, de sorte que l'on arrive à une équation à laquelle s'applique la méthode de M. FREDHOLM, après avoir fait un certain nombre d'approximations. Nous ne nous occuperons pas de cette question.

En appliquant la méthode des approximations successives, on trouve la solution

$$(44) \quad \varphi_{10}(\eta, \xi) = f(\eta, \xi) + \iint_{\sigma_1} K(\eta, \xi; y, z) f(y, z) dy dz + \dots$$

Pour la fonction K , on trouve la limitation

$$K < \frac{M_1}{r^{\frac{1}{2}+3}} + M_2.$$

Le terme général de la série (44)

$$\iint_{\sigma_1} K(\eta, \xi; y, z) \iint_{\sigma_1} K(y, z; y_1, z_1) \dots \iint_{\sigma_1} K(y_{n-2}, z_{n-2}; y_{n-1}, z_{n-1}) \cdot f(y_{n-1}, z_{n-1}) dy_{n-1} dz_{n-1} \dots dy_1 dz_1 dy dz$$

est donc, en valeur absolue, moindre que

$$m_0 \left(M_1 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}} dr \frac{1}{r^{2/3}} + M_2 b_0 c_0 \right)^n = m_0 [M_1 6\pi (b_0^2 + c_0^2)^{1/3} + M_2 b_0 c_0]^n.$$

Par suite, si

$$M_1 6\pi (b_0^2 + c_0^2)^{1/3} + M_2 b_0 c_0 < 1,$$

la série est convergente. Cette condition est certainement remplie si b_0 et c_0 sont suffisamment petits.

III. Sur l'équation $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

20. Nous allons maintenant nous occuper du cas $p=4$, $m=1$, $a=-1$, c'est-à-dire de l'équation

$$(II) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

qui est de la forme (e₁) avec $q=2$.

Pour obtenir la solution fondamentale

$$F = r^{-\frac{1}{2}} f_0 \left(\frac{\xi - x}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \\ r^{-\frac{1}{2}} g_0 \left(\frac{x - \xi}{r^{\frac{1}{2}}} \right),$$

nous aurons à chercher les racines de l'équation en ϱ .

$$\varrho^2 + \alpha^4 = 0.$$

Ces racines sont

$$i\alpha^2 \text{ et } -i\alpha^2.$$

Il n'y en a qu'une qui a une partie imaginaire positive. On a donc une seule fonction P

$$P(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy} dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} i H_0^1(ix),$$

et la solution fondamentale s'écrit

$$(1) \quad F = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty i H_0^1(i\alpha^2) \cos \alpha(\xi - x) d\alpha.$$

On en tire l'expression suivante pour $f_0(t)$

$$(2) \quad f_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty iH_0^1(i\lambda^2) \cos \lambda t \, d\lambda.$$

Comme on le voit, $f_0(t)$ est une fonction paire. En introduisant le développement de $\cos \lambda t$, on obtient

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n},$$

où

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4\pi 2n} \int_0^\infty iH_0^1(i\lambda^2) \lambda^{2n} d\lambda.$$

Pour obtenir les valeurs de ces coefficients, on doit se servir de la formule *

$$\int_0^\infty iH_0^1(i\beta) \beta^q d\beta = \frac{2^q}{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \right]^2.$$

La substitution $\lambda = \sqrt{\beta}$ donne

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{8\pi 2n} \int_0^\infty iH_0^1(i\beta) \beta^{n-\frac{1}{2}} d\beta.$$

Donc

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2-n} \pi^2 2n} \left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right) \right]^2.$$

Cherchons maintenant la représentation donnée dans le paragraphe 5. L'équation en α

$$\alpha^4 - \alpha^2 - 1 = 0$$

a les racines

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\alpha^2, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\alpha^2 \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\alpha^2, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\alpha^2,$$

et les angles θ_ν y correspondants sont

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}.$$

Après quelques calculs faciles, on trouve

$$(3) \quad \begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-x)\mu} \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-x)\mu - \frac{\pi}{4} \right] J_0(r\mu^2) d\mu & \xi \geq x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\xi)\mu} \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\xi)\mu - \frac{\pi}{4} \right] J_0(r\mu^2) d\mu & x \geq \xi. \end{aligned}$$

En partant de cette expression, on déduit

* N. NIELSEN loc. cit. p. 190.

$$(4) \quad f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t\lambda} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\lambda - \frac{\pi}{4}\right) J_0(\lambda^2) d\lambda,$$

et, $f_0(t)$ étant paire, on a

$$g_0(\theta) = f_0(\theta).$$

La dérivée de F par rapport à r s'écrit

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r^{-\frac{3}{2}} h_0(t)$$

$$r^{-\frac{3}{2}} k_0(\theta),$$

où

$$h_0(t) = -\frac{1}{2} \left[f_0(t) + t f_0'(t) \right]$$

$$k_0(\theta) = -\frac{1}{2} \left[g_0(\theta) + \theta g_0'(\theta) \right],$$

et les fonctions $h_0(t)$ et $k_0(\theta)$ sont données par

$$h_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t\lambda} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\lambda - \frac{\pi}{4}\right) J_1(\lambda^2) d\lambda$$

$$k_0(\theta) = h_0(\theta).$$

D'après le paragraphe 11, on connaît les intégrales

$$\int_0^\infty h_0(t) dt = \int_0^\infty k_0(\theta) d\theta = -\frac{1}{4\pi}.$$

L'équation différentielle ordinaire à laquelle satisfait $f_0(t)$ s'écrit

$$(5) \quad \frac{d^3 f_0}{dt^3} - \frac{1}{4} t^2 \frac{df_0}{dt} - \frac{1}{4} t f_0 = 0.$$

Pour obtenir un développement asymptotique, posons dans (4) $t\lambda = \mu$. Nous obtenons

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\mu} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mu - \frac{\pi}{4}\right) J_0\left(\frac{\mu^2}{t^2}\right) d\mu.$$

En remplaçant ici la fonction de BESSEL par son développement, on trouve

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2 t^{4n}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\mu} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu^{4n} d\mu.$$

L'intégrale de cette expression est égale à $(-1)^n \frac{1}{4n}$. On a donc le développement asymptotique

$$f_0(t) \sim \frac{1}{2\pi t} + \dots + \frac{4n}{2^{2n+1}\pi(n)^2 t^{4n+1}} + \dots$$

On obtient de même

$$h_0(t) \sim \frac{4}{2^2\pi t^5} + \dots + \frac{n \cdot 4n}{2^{2n}\pi(n)^2 t^{4n+1}} + \dots,$$

ainsi que

$$(6) \quad h'_0(t) \sim -\frac{5}{2^2\pi t^6} - \dots$$

21. Les formules (α_1) et (α_2) s'écrivent

$$(7) \quad u(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\sigma_0 + \sigma_1} = - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(F \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} u \right) \cos x N d\sigma - \\ - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1 + \Sigma} \left(F \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial F}{\partial n} u \right) ds dx.$$

L'étude des intégrales qui contiennent des dérivées par rapport à x

$$U_{0i} = \iint_{\sigma_0} \varphi \frac{\partial^{i-1} F}{\partial x^{i-1}} \cos x N d\sigma \quad i = 1, \dots, 4,$$

se fait comme dans le cas de l'équation (I), et donne des résultats analogues. Ainsi, les intégrales sont convergentes, même quand P est sur σ_0 , et sont des solutions de l'équation (II). Elles sont des fonctions continues quand P n'est pas sur σ_0 . Les trois premières restent continues quand P traverse σ_0 , tandis que U_{04} est discontinue sur σ_0 .

A l'aide de la formule (5), on obtient pour U_{04} l'expression

$$U_{04} = \frac{1}{2} \iint_{\sigma_0} \varphi \frac{1}{r^2} \frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{1/2}} h_0 \left(\frac{\xi - \chi_0(y, z)}{r^{1/2}} \right) dy dz.$$

En procédant comme dans le cas de la fonction analogue U_{03} du paragraphe 15, on trouve la limite suivante de U_{04} , quand P s'approche d'un point de σ_0 qui n'est pas sur l_0

$$\pm \frac{1}{2} \varphi(\eta, \zeta) : (U_{04})_{\pm} = \chi_0(\eta, \zeta).$$

On doit se servir du signe $+$, quand P s'approche de σ_0 en étant intérieur à S , tandis que l'on aura $-$ si P est extérieur.

On trouve de même que la fonction

$$U_{14} = \iint_{\sigma_1} \varphi \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \cos x N d\sigma$$

tend vers

$$\pm \frac{1}{2} \varphi(\eta, \zeta) + (U_{14})_{\xi=\chi_i(\eta, \xi)}$$

quand P tend vers un point de σ_1 qui n'est pas sur l_1 , le signe $+$ étant valable quand P est intérieur à S , et le signe $-$ quand P est extérieur.

Aussi, U_{04} est continue sur l_0 , si φ est nulle sur Σ . Il en est de même de U_{11} sur l_1 .

La fonction

$$V = \iint_{\Sigma} \Phi(s, x) \frac{\partial F}{\partial n} ds dx,$$

ou

$$V = - \int_0^s \int_{l_0(s)}^{l_1(s)} \Phi(s, x) \frac{\cos(r, n)}{r} \frac{1}{r^{1/2}} h_0\left(\frac{\xi - x}{r^{1/2}}\right) ds dx$$

jouit des mêmes propriétés que la fonction correspondante du paragraphe 15. Si P n'est pas sur Σ , elle est continue.

On trouve les relations suivantes entre les quantités V_Q , V_{iQ} et V_{eQ} :

I) Si Q est un point ordinaire de la courbe d'intersection de Σ par le plan $x = \xi$

$$(8) \quad \begin{aligned} V_{iQ} &= V_Q - \frac{1}{2} \Phi(\sigma, \xi) \\ V_{eQ} &= V_Q + \frac{1}{2} \Phi(\sigma, \xi). \end{aligned}$$

II) Si Q est une *pointe*, l'angle des tangentes étant égal à α

$$\begin{aligned} V_{iQ} &= V_Q + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \Phi(\sigma, \xi) \\ V_{eQ} &= V_Q - \frac{\alpha}{2\pi} \Phi(\sigma, \xi). \end{aligned}$$

On démontre que la fonction V est continue sur l_0 et l_1 si $\Phi(s, l_0(s)) = 0$.

22. Il y a deux problèmes d'intégration que nous allons considérer:

I) Dans le premier, il s'agit de trouver une solution u , quand on connaît

$$\begin{aligned} u &= \psi_{00}(\eta, \zeta) & \text{sur } \sigma_0 & & u &= \psi_{10}(\eta, \zeta) & \text{sur } \sigma_1 & & u &= \Psi(\sigma, \xi) & \text{sur } \Sigma. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \psi_{02}(\eta, \zeta) & & & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \psi_{12}(\eta, \zeta) & & & & & \end{aligned}$$

La fonction Ψ sera deux fois dérivable par rapport à ξ , et les valeurs données de u ainsi que de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ doivent se raccorder sur l_0 et l_1 .

II) Dans le second, on connaît

$$\begin{array}{lll} u = \psi_{00}(\eta, \zeta) & u = \psi_{10}(\eta, \zeta) & \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \psi_{01}(\eta, \zeta) & \text{sur } \sigma_0 & \frac{\partial u}{\partial \xi} = \psi_{11}(\eta, \zeta) \quad \text{sur } \sigma_1 \quad u = \Psi(\sigma, \xi) \text{ sur } \Sigma. \end{array}$$

Les valeurs données de u doivent se raccorder sur l_0 et l_1 . De plus, la fonction Ψ aura une dérivée par rapport à ξ , qui est égale à ψ_{01} sur l_0 , et à ψ_{11} sur l_1 .

Toutes les fonctions données: ψ_{uv} , Ψ , ainsi que les dérivées de Ψ , seront continues. On sait, par les recherches du paragraphe 13, que u est uniquement déterminée par les données de les problèmes.

23. Nous allons d'abord traiter le problème I) dans le cas spécial où σ_0 et σ_1 sont des portions des plans $x=0$ et $x=a_0$. Nous supposons de plus que la courbure de la section du cylindre Σ par un plan $x=\text{const.}$ est finie et différente de zéro. Enfin, les fonctions ψ_{00} et ψ_{10} seront une fois dérivables par rapport à η et ζ , les dérivées étant continues.

Faisons d'abord une application de la méthode des images. Prenons un point $P(\xi, \eta, \zeta)$ à l'intérieur de S , et formons l'équation (7) pour les points

$$2\lambda a_0 + \xi, \eta, \zeta \quad \lambda = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \pm \dots,$$

ainsi que pour les points

$$2\lambda a_0 - \xi, \eta, \zeta \quad \lambda = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \pm \dots$$

Ajoutons toutes ces équations, après avoir changé le signe de celles qui se rapportent aux derniers points. Tous les points considérés sauf P se trouvant à l'extérieur de S , nous aurons $u(\xi, \eta, \zeta)$ à gauche. En introduisant la fonction *

$$(9) \quad G = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [F(2\lambda a_0 + \xi - x) - F(2\lambda a_0 - \xi - x)]$$

nous obtenons

$$(10) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = & - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(G \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} u \right) \cos x N d\sigma - \\ & - \iint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} u \right) ds dx, \end{aligned}$$

si les séries qui représentent G et ses dérivées sont uniformément convergentes.

Pour démontrer la convergence uniforme de la série (9), nous remarquons qu'elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} G = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[2\xi F'(2\lambda a_0) + \frac{(\xi - x)^2}{2} F''(2\lambda a_0 + \vartheta_1(\xi - x)) - \right. \\ \left. - \frac{(\xi + x)^2}{2} F''(2\lambda a_0 - \vartheta_2(\xi + x)) \right] \quad 0 < \vartheta_i < 1. \end{aligned}$$

* Pour abrégé, nous n'avons pas écrit les arguments $\eta - y$ et $\zeta - z$, qui sont les mêmes dans toutes les fonctions F considérées.

Or, F étant une fonction paire de $\xi - x$, $F'(\xi - x)$ est impaire. Donc, la somme

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2\xi F'(2\lambda a_0)$$

s'évanouit, et la fonction G s'écrit

$$(11) \quad G = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\xi - x)^2}{2} F''[2\lambda a_0 - \vartheta_1(\xi - x)] - \frac{(\xi + x)^2}{2} F''[2\lambda a_0 - \vartheta_2(\xi + x)] \right\}.$$

En dérivant l'expression (3) de F , on trouve

$$F'(\xi - x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - x)\mu} \cos\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - x)\mu + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \mu^2 J_0(r\mu^2) d\mu \quad \xi \geq x,$$

expression qui donne la limitation

$$F'(\xi - x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - x)\mu} \cdot \mu^2 d\mu = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(\xi - x)^3} \quad \xi > x.$$

En se servant de cette inégalité, on démontre aisément que la série (11) est absolument et uniformément convergente. Il en est de même des séries qui représentent $\frac{\partial G}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ ainsi que $\frac{\partial G}{\partial r}$.

On voit bien aisément que G ainsi que $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ est égale à zéro pour $x=0$ et $x=a_0$, par le fait que F et F'' sont des fonctions paires de $\xi - x$. Donc, l'égalité (10) s'écrit

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} u \right) \cos x N d\sigma - \iint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} u \right) ds dx.$$

Revenons maintenant à notre problème. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ sur l_0 et l_1 . Il en est évidemment ainsi, si nous pouvons former une solution régulière qui prend, ainsi que sa dérivée seconde par rapport à ξ , sur l_0 et l_1 les valeurs données. Une telle fonction est donnée par *

$$(12) \quad \sum_{\nu=0}^3 A_{\nu}(\eta, \zeta) \xi^{\nu},$$

$A_{\nu}(\eta, \zeta)$ étant des fonctions harmoniques déterminées.

* Cette fonction suffit même quand l_0 et l_1 ne sont plus des courbes planes.

Nous allons faire voir que l'on peut supposer $u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ même sur σ_0 et σ_1 . Considérons, en effet, l'intégrale

$$(13) \quad - \iint_{\sigma'_0} \left(\psi_{02} \frac{\partial G}{\partial x} + \psi_{00} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right) dy dz + \iint_{\sigma'_1} \left(\psi_{12} \frac{\partial G}{\partial x} + \psi_{10} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right) dy dz.$$

Ici les domaines d'intégration σ'_0 et σ'_1 sont des portions des plans $x=0$ et $x=a_0$, renfermant respectivement σ_0 et σ_1 . Extérieur à σ_0 et σ_1 les fonctions $\psi_{\mu\nu}$ seront arbitraires, mais telles, qu'elles seront continues dans σ'_0 et σ'_1 . De plus ψ_{00} et ψ_{10} seront une fois dérivables par rapport à η et ζ , les dérivées étant continues dans σ'_0 et σ'_1 . Nous allons montrer que c'est là une solution qui prend, ainsi que sa dérivée seconde par rapport à ξ , sur σ_0 et σ_1 les valeurs données.

Quand les points P et (x, y, z) ne sont pas tous les deux situés sur σ'_0 ou sur σ'_1 , tous les termes des séries qui représentent $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ sont continues, et comme ces séries sont uniformément convergentes, elles représentent des fonctions continues. On voit aisément qu'elles sont égales à zéro quand l'un des points se trouve sur σ'_0 , l'autre étant situé sur σ'_1 . Par suite, si nous faisons tendre P vers un point Q de σ_0 , l'intégrale dans (13) étendue à σ'_1 s'évanouit. On voit aisément qu'il en est de même de l'intégrale étendue à σ'_0 , si l'on supprime dans les séries $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ les termes qui correspondent aux points

$$(14) \quad (\xi, \eta, \zeta) \text{ et } (-\xi, \eta, \zeta)$$

Il reste à examiner les intégrales

$$- \iint_{\sigma'_0} \psi_{02} \frac{\partial}{\partial x} [F(\xi - x) - F(-\xi - x)] dy dz$$

et

$$- \iint_{\sigma'_0} \psi_{00} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [F(\xi - x) - F(-\xi - x)] dy dz.$$

Évidemment, la première tend vers zéro. Quant à la seconde, on trouve, en se reportant à l'étude de l'intégrale U_{04} du paragraphe 21, la limite

$$\psi_{00}(\eta, \zeta).$$

La dérivée seconde par rapport à ξ de (13) s'écrit

$$- \iint_{\sigma'_0} \left(\psi_{02} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + \psi_{00} \frac{\partial^5 G}{\partial x^5} \right) dy dz + \iint_{\sigma'_1} \left(\psi_{12} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + \psi_{10} \frac{\partial^5 G}{\partial x^5} \right) dy dz.$$

Quand P tend vers Q , la limite de la dernière intégrale, ainsi que celle de la

première, où l'on a supprimé la partie qui vient des points (14), est zéro. Il reste les intégrales

$$-\int_{\sigma'_0} \left(\int_{\sigma'_0} \psi_{02} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [F(\xi - x) - F(-\xi - x)] dy dz \right)$$

et

$$-\int_{\sigma'_0} \left(\int_{\sigma'_0} \psi_{00} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [F(\xi - x) - F(-\xi - x)] dy dz, \right)$$

dont la première tend vers

$$\psi'_{02}(\eta, \xi),$$

La dernière peut s'écrire

$$\int_{\sigma'_0} \left(\int_{\sigma'_0} \psi_{00} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) dy dz, \right)$$

où

$$F_1 = -\frac{1}{r} \left[f_0 \left(\frac{\xi - x}{r^{1/2}} \right) + f'_0 \left(\frac{\xi + x}{r^{1/2}} \right) \right].$$

Une transformation par des intégrations par parties donne

$$\int_{s'_0} \psi_{00} \frac{\partial F_1}{\partial n} ds + \int_{\sigma'_0} \left(\int_{\sigma'_0} \left(\frac{\partial \psi_{00}}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{00}}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dy dz, \right)$$

s'_0 étant le contour limitant le domaine d'intégration σ'_0 .

Évidemment, l'intégrale curviligne tend vers zéro. L'intégrale double s'écrit

$$2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{Q(\alpha)} dr \left(\frac{\partial \psi_{00}}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial \psi_{00}}{\partial z} \sin \alpha \right) \frac{1}{r} h'_0 \left(\frac{\xi}{r^{1/2}} \right),$$

ou, si nous introduisons la variable d'intégration $t = \xi r^{-1/2}$,

$$4 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{\xi}^{\infty} dt \left(\frac{\partial \psi_{00}}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial \psi_{00}}{\partial z} \sin \alpha \right) \frac{h'_0(t)}{t}.$$

Quand ξ tend vers zéro, cette expression tend vers

$$4 \left[\left(\frac{\partial \psi_{00}}{\partial y} \right)_{y=\eta} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \left(\frac{\partial \psi_{00}}{\partial z} \right)_{y=\eta} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \right] \int_0^{\infty} \frac{h'_0(t)}{t} dt.$$

Comme les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha$$

sont égales à zéro, la limite cherchée est zéro.

Quand le point Q se trouve sur σ_1 , la démonstration est toute analogue. Alors, on doit considérer à part les termes des séries $\frac{\partial G}{\partial x} \dots$ qui correspondent aux point

$$(\xi, \eta, \zeta) \text{ et } (2a_0 - \xi, \eta, \zeta).$$

Évidemment, le cas général de notre problème se réduit au cas où les fonctions données sur σ_0 et σ_1 sont nulles par l'addition de l'expression (13).

Cherchons à résoudre le problème par l'expression

$$(15) \quad u = \iint_{\Sigma} \Phi(s, x) \frac{\partial G}{\partial n} ds dx.$$

Quand P tend vers un point de σ_0 ou σ_1 qui ne se trouve pas sur l_0 ou l_1 , l'expression (15), ainsi que sa dérivée seconde par rapport à ξ , prend la valeur zéro. En effet, l'expression (9) nous montre que G , ainsi que toutes ses dérivées par rapport aux variables y et z , est nulle pour $\xi=0$ et $\xi=a_0$ si $r>0$. Il en est de même de $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$ et de ses dérivées par rapport à y et z .

Si $\Phi(s, x)$ est une fonction continue de x et que de plus $\Phi(s, 0) = \Phi(s, a_0) = 0$, l'expression (15) s'annule quand P s'approche d'un point de l_0 ou l_1 . Évidemment, nous n'avons besoin d'examiner que les termes qui correspondent à P et à celle de ses images qui vient coïncider avec P sur l_0 ou l_1 . Mais, d'après le paragraphe 21, même ces intégrales sont continues, et on voit qu'elles se détruisent.

Si $\Phi(s, x)$ est deux fois dérivable par rapport à x , les dérivées étant des fonctions continues de x , et que de plus $\Phi^{(02)}(s, 0) = \Phi^{(02)}(s, a_0) = 0$, nous pouvons montrer que même la dérivée seconde par rapport à ξ de (15) tend vers zéro quand P s'approche d'un point Q de l_0 ou l_1 . En effet, supposons par exemple que Q se trouve sur l_0 . Évidemment, si l'on supprime les termes qui correspondent aux points (14), le reste tend vers zéro. Il reste à examiner l'intégrale

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \Phi(s, x) \left(\frac{\partial^3 F(\xi - x)}{\partial \xi^2 \partial n} - \frac{\partial^3 F(-\xi - x)}{\partial \xi^2 \partial n} \right) ds dx, \\ \text{ou} \\ & - \int_0^s \int_0^{a_0} \Phi(s, x) \frac{\cos(r, n)}{r} \frac{1}{r^{3/2}} \left[h_0' \left(\frac{\xi - x}{r^{1/2}} \right) - h_0' \left(\frac{-\xi - x}{r^{1/2}} \right) \right] ds dx. \end{aligned}$$

Deux intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned} & \int_0^s \Phi^{(01)}(s, a_0) \frac{\cos(r, n)}{r} \frac{1}{r^{1/2}} \left[h_0 \left(\frac{\xi - a_0}{r^{1/2}} \right) - h_0 \left(\frac{-\xi - a_0}{r^{1/2}} \right) \right] ds - \\ & - \int_0^s \int_0^{a_0} \Phi^{(02)}(s, x) \frac{\cos(r, n)}{r} \frac{1}{r^{1/2}} \left[h_0 \left(\frac{\xi - x}{r^{1/2}} \right) - h_0 \left(\frac{-\xi - x}{r^{1/2}} \right) \right] ds dx, \end{aligned}$$

et cette expression tend évidemment vers zéro.

Cherchons la limite de (15) quand P , tout en étant intérieur à S , tend vers un point $Q(\sigma, \xi)$ de Σ qui ne se trouve pas sur l_0 ou l_1 . Ce n'est que le terme

$$\iint_{\Sigma} \Phi \frac{\partial F}{\partial n} ds dx$$

qui est discontinu sur Σ . Par suite, en se servant de la formule (8), on obtient la limite suivante de (15)

$$\frac{1}{2} \Phi(\sigma, \xi) + u_Q.$$

La condition relative à la surface Σ donne l'équation intégrale

$$(16) \quad \Phi(\sigma, \xi) + \int_0^s \int_0^{a_0} \Phi(s, x) K(\sigma, \xi; s, x) ds dx = \Psi_1(\sigma, \xi),$$

où

$$(17) \quad K(\sigma, \xi; s, x) = -2 \frac{\cos(r_0, n)}{r_0} \frac{1}{r_0^{1/2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[h_0 \left(\frac{2\lambda a_0 + \xi - x}{r_0^{1/2}} \right) - \right. \\ \left. - h_0 \left(\frac{2\lambda a_0 - \xi - x}{r_0^{1/2}} \right) \right],$$

$$\Psi_1(\sigma, \xi) = 2\Psi(\sigma, \xi).$$

Ici r_0 dénote la distance entre les deux points $A = (s, x)$ et $P_1 = (\sigma, \xi)$ de Σ .

C'est là une équation de l'espèce étudiée par M. FREDHOLM. On se trouve dans le cas où le noyau K est fini, sauf pour $s = \sigma$, $x = \xi$. Montrons cependant que l'expression

$$(18) \quad (\sigma - s)^{1/2} K$$

est finie même pour $s = \sigma$, $x = \xi$.

On a

$$(19) \quad \frac{\cos(r_0, n)}{r_0} = \frac{1}{2AP_2},$$

P_2 étant le point où la normale de AP_1 qui passe par le point milieu de AP_1 coupe la normale de Σ en A . Quand A et P_1 viennent se confondre, AP_2 devient le rayon de courbure en A , lequel est différent de zéro. Par suite, l'expression (19) reste finie.

La courbure de la section de Σ par un plan $x = \text{const.}$ étant finie, on a

$$|s - \sigma| < m_1 \cdot r_0,$$

m_1 étant une constante.

On voit donc que l'expression (18) est finie, et on peut appliquer la mé-

thode de M. FREDHOLM. Puisque le problème n'admet qu'une seule solution, le déterminant de l'équation intégrale est différent de zéro.

Maintenant, on aura à examiner si les suppositions faites plus haut sur ϕ sont satisfaites, mais nous ne nous en occuperons pas.

24. Passons maintenant à un autre cas. Nous allons considérer le problème II) dans le cas où Σ est formée d'une partie du prisme défini par les équations

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad y = b_0 \\ z &= 0, \quad z = c_0. \end{aligned}$$

De plus, nous supposons que σ_0 est une portion du plan $x=0$.

En procédant comme dans le paragraphe 17, nous arrivons à la formule

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = & - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(G_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \dots - \frac{\partial^3 G_0}{\partial x^3} u \right) \cos x N d\sigma - \\ (20) \quad & - \iint_{\sigma_1} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G_0}{\partial n} u \right) ds dx + \iint_{\Sigma} \frac{\partial G_0}{\partial n} u ds dx, \end{aligned}$$

où G_0 est composée de la même manière que la fonction G_0 du paragraphe 17.

Pour éliminer les fonctions $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{\sigma_0}$ et $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{\sigma_0}$ qui figurent dans la formule (20), nous allons former une solution G_1 qui aura les propriétés suivantes: Sur Σ G_1 sera nulle. Sur σ_0 ($x=0$) G_1 sera égale à G_0 et $\frac{\partial G_1}{\partial x}$ égale à $\frac{\partial G_0}{\partial x}$. De plus, G_1 sera régulière, sauf peut-être pour $y=\eta$, $z=\zeta$. Sur la demi-ligne $y=\eta$, $z=\zeta$, $x \geq 0$ G_1 , $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ seront finies.

Si nous posons alors

$$G_2 = G_0 - G_1,$$

nous aurons la formule

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = & - \iint_{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3} u \right) \cos x N d\sigma - \iint_{\sigma_1} \left(G_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial G_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cos x N d\sigma - \\ (21) \quad & - \iint_{\sigma_1} \left(G_2 \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial G_2}{\partial n} u \right) ds dx + \iint_{\Sigma} \frac{\partial G_2}{\partial n} u ds dx. \end{aligned}$$

Pour former la fonction G_1 , nous remarquons que la solution fondamentale F est la partie réelle de

$$\begin{aligned} (1-i)H(\xi-x) & \quad \xi > x \\ (1-i)H(x-\xi) & \quad \xi \leq x, \end{aligned}$$

où

$$H(\xi - x) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty e^{-(\xi-x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + i(\xi-x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} J_0(r\lambda^2) d\lambda.$$

En remplaçant dans l'intégrale $H(\xi - x)$ par $-x$ ou par $-ix$, on obtient les deux solutions

$$H(\xi + x) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty e^{-(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + i(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} J_0(r\lambda^2) d\lambda$$

et

$$H(\xi + ix) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty e^{-(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + i(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} J_0(r\lambda^2) d\lambda.$$

La partie réelle F_2 de la fonction

$$-(1+i)H(\xi+x) + 2H(\xi+ix)$$

s'écrit

$$F_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \left\{ \cos \left[(\xi+x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right] - \sqrt{2} \cos(\xi-x)\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right\} J_0(r\lambda^2) d\lambda.$$

Montrons que la série G_1 , formée, en partant de la fonction F_2 , de la même manière que G_0 est formée de F , est une fonction ayant les propriétés demandées.

En procédant comme dans le paragraphe 18, on démontre que les séries qui représentent G_1 , et ses dérivées sont absolument et uniformément convergentes.

Évidemment, G_1 est régulière pour $\xi > 0$, même quand $y = \eta$, $z = \zeta$, et G_1 , $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ sont finies sur la demi-ligne $y = \eta$, $z = \zeta$, $x \geq 0$ pour $\xi > 0$.

G_1 est nulle sur Σ . De plus, en considérant l'expression

$$(1-i)H(\xi-x) + (1+i)H(\xi+ix) = 2H(\xi+ix),$$

dont $F - F_2$ est la partie réelle, on trouve aisément que $F - F_2$ et $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial x}$ sont égales à zéro pour $x=0$, d'où suit que les conditions sur σ_0 sont remplies.

Si la surface σ_1 s'éloigne infiniment, les intégrales dans (21) étendues à σ_1 s'évanouissent dans certaines conditions, les autres intégrales restant finies, et nous avons la formule

$$u(\xi, \eta, z) = - \iint_{\sigma_0} \left(q'_{01} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} - q'_{00} \frac{\partial^3 G_2}{\partial x^3} \right) \cos x N d\sigma - \iint_{\Sigma} p \frac{\partial G_2}{\partial n} ds dx.$$

25. Nous allons maintenant nous occuper d'un cas très spécial, mais néanmoins remarquable, parce qu'il nous amène à considérer une certaine équation intégrale d'un grand intérêt.

Cherchons une solution u avec les données

$$\begin{aligned} u &= \psi_{00}(\eta, \zeta) \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \psi_{01}(\eta, \zeta) \quad \text{sur } \sigma_0, \end{aligned}$$

σ_0 étant formée d'une portion du plan $x = 0$.

En mettant u sous la forme

$$u = \iint_{\sigma_0} \varphi_{00} F \cos x N d\sigma + \iint_{\sigma_0} \varphi_{01} \frac{\partial F}{\partial x} \cos x N d\sigma,$$

on trouve les équations de condition

$$\begin{aligned} -f_0(0) \iint_{\sigma_0} \varphi_{00} \frac{dy dz}{r^{1/2}} &= \psi_{00}(\eta, \zeta) \\ + f_0''(0) \iint_{\sigma_0} \varphi_{01} \frac{dy dz}{r^{3/2}} &= \psi_{01}(\eta, \zeta). \end{aligned}$$

Elles sont toutes les deux de la forme

$$(22) \quad \iint_{\sigma_0} \frac{\varphi(y, z) dy dz}{|(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2|^\alpha} = \psi(\eta, \zeta) \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette équation, qui doit être considérée comme une généralisation de l'équation connue d'ABEL

$$\int_0^x \frac{q(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\alpha} = \psi(x) \quad 0 < \alpha < 1,$$

peut, sans doute, être traitée par des méthodes analogues à celles que l'on applique à cette dernière équation. Nous réservons pour un autre mémoire l'étude de l'équation (22), ainsi que de l'équation plus générale, où la multiplicité de l'intégrale est plus grande que deux.

IV. L'équation (e) dans le cas $2m > p$.

26. Abordons maintenant l'étude du cas où $2m > p$, l'ordre de l'équation (e) étant égal à $2m$. Pour pouvoir profiter autant que possible des calculs précédents, nous écrivons l'équation de la même manière que dans le cas précédent

$$(e) \quad \frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \Delta^m u = 0.$$

Nous gardons la supposition que p et m n'ont pas de diviseur commun. Aussi, la valeur absolue de la constante a sera égale à l'unité. Ensuite, nous excluons le cas $p = 2q$, $a = (-1)^q$, de sorte que toutes les équations étudiées peuvent être ramenées aux deux équations (e_1) et (e_2) .

Dans le cas actuel, les caractéristiques sont données par

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^m = 0.$$

Les seules caractéristiques réelles sont les plans

$$x = \text{const.}$$

La forme de l'équation n'étant pas changée, la formule (1) du paragraphe 1 est valable.

Nous allons considérer une surface S particulière, composée de la manière suivante. Considérons une surface ayant en chaque point un plan tangent, jamais parallèle au plan des yz , et telle qu'un plan $x = c$ quelconque la coupe suivant une courbe fermée, sans points multiples. Nous appelons Γ_c cette courbe de section, et σ_c la portion du plan $x = c$ qu'elle renferme. Appelons Σ la partie de cette surface qui est située entre les plans caractéristiques $x = c_0$ et $x = c_1$. La surface S sera formée de Σ , σ_{c_0} et σ_{c_1} .

Dans le cas de cette surface S , la formule (1) du paragraphe 1 devient

$$(1) \quad \iint_{\sigma_{c_0} + \sigma_{c_1} + \Sigma} \left(v \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^{p-2} u}{\partial x^{p-2}} + \dots + (-1)^p \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} u \right) \cos x N d\sigma -$$

$$- a \iint_{\Sigma} \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u - \frac{\partial v}{\partial n} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} v \cdot u \right) ds dx = 0.$$

Ici n est la normale intérieure de la section Γ_c , et s désigne l'arc de courbe de cette section,

La formule (1) vaut si u et v sont régulières dans V et sur S . Cependant, la fonction v dont nous allons faire usage dans ce qui suivra est singulière dans le point $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Donc, avant d'appliquer la formule (1) du paragraphe 1, il faut isoler ce point s'il se trouve dans V ou sur S . Nous revenons plus loin sur cette question

En posant $v = 1$ dans (1), on trouve la formule

$$\iint_{\sigma_{c_0} + \sigma_{c_1} + \Sigma} \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} \cos x N d\sigma - a \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u ds dx = 0.$$

27. Passons à la recherche de la solution fondamentale. Dans le cas actuel, il est avantageux de commencer par l'étude de la dérivée d'ordre $p - 1$ par rapport à x de l'expression (F). En introduisant des coordonnées polaires, cette expression s'écrit

$$(2) \quad \frac{(-1)^{p-1}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(i\alpha)^{p-1} e^{i\alpha(\xi-x)} \varrho J_0(r\varrho)}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho.$$

Il faut évaluer l'intégrale par rapport à α de l'expression (2)

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\alpha)^{p-1} e^{i\alpha(\xi-x)}}{(i\alpha)^p + a(-1)^m \varrho^{2m}} d\alpha,$$

ce qui se fait à l'aide du théorème des résidus. En appliquant les notations du paragraphe 5, on trouve la valeur

$$2\pi i \sum_{\alpha_+} \frac{(i\bar{\alpha}_\nu)^{p-1} e^{i\bar{\alpha}_\nu(\xi-x)}}{p i^p \alpha_\nu^{p-1}} \quad \xi > x$$

$$- 2\pi i \sum_{\alpha_-} \frac{(i\bar{\alpha}_\nu)^{p-1} e^{i\bar{\alpha}_\nu(\xi-x)}}{p i^p \bar{\alpha}_\nu^{p-1}} \quad \xi < x,$$

ou

$$\frac{2\pi}{p} \sum_{\alpha_+} e^{-\beta_\nu(\xi-x)\varrho^p + i\alpha_\nu(\xi-x)\varrho^p} \quad \xi > x$$

$$\frac{2\pi}{p} \sum_{\alpha} e^{\beta_{\nu}(x-\xi) \varrho^{\frac{2m}{p}}} e^{i\alpha_{\nu}(x-\xi) \varrho^{\frac{2m}{p}}} \quad \xi < x,$$

α_{ν} étant les racines de l'équation

$$i^p \alpha^p + \alpha(-1)^m \varrho^{2m} = 0.$$

En introduisant cette expression dans (2), on trouve, en prenant la partie réelle,

$$(4) \quad \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2p\pi} \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\beta_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos \alpha_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}} \cdot \varrho J_0(r\varrho) d\varrho \quad \xi > x$$

$$- \frac{(-1)^p}{2p\pi} \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\beta_{\nu}(x-\xi) \varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos \alpha_{\nu}(x-\xi) \varrho^{\frac{2m}{p}} \cdot \varrho J_0(r\varrho) d\varrho \quad \xi < x.$$

Ce sera là la dérivée d'ordre $p-1$ par rapport à x de la solution fondamentale F . Quand $p=1$, elle représente la solution F elle-même. Comme il n'y a dans ce cas qu'une seule racine $\bar{\alpha}$, F est égale à zéro pour $x > \xi$ ou pour $x < \xi$.

Les intégrales de (4), ainsi que celles que l'on en obtient en dérivant un nombre quelconque de fois par rapport à x , ξ et r , sont absolument convergentes quand $x \neq \xi$, et la convergence est uniforme, sauf dans le voisinage de $x = \xi$. On trouve bien aisément que l'expression (4) est une solution de l'équation (e). Comme on le voit, $\frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}}$ est régulière, sauf peut-être sur le plan caractéristique $x = \xi$.

Partons maintenant de l'expression (4), et cherchons $\frac{\partial^{p-2} F}{\partial x^{p-2}}$. On a

$$- \varrho^{-\frac{2m}{p}} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\beta_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos \left[\alpha_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}} - \theta_{\nu} \right] \right) = e^{-\beta_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos \alpha_{\nu}(\xi-x) \varrho^{\frac{2m}{p}}.$$

Donc, en intégrant (4) par rapport à x , on obtient en général une expression qui n'a pas de sens, à cause du facteur

$$\varrho^{1-\frac{2m}{p}}.$$

Il faut considérer séparément deux cas.

1) Supposons que $m > p$, ou $\frac{2m}{p} > 2$.

Dans ce cas, la condition d'intégrabilité n'est pas remplie à l'origine. Pour donner un sens à l'intégrale, il faut ajouter un terme complémentaire, solution de l'équation (e). De plus, ce terme doit être fonction de r seul, de sorte que la dérivée en par rapport à x est zéro. Nous répétons le procédé en cherchant $\frac{\partial^{p-3} F}{\partial x^{p-3}}$ et ainsi de suite, jusqu'à F . Cela nous amène à considérer une suite de

termes complémentaires, dont l'un est la dérivée par rapport à x du précédent multiplié par $-\varrho^{-\frac{2m}{p}}$, et qui sont des solutions de l'équation (e).

Pour former les termes complémentaires, nous considérons les polynômes

$$p_n(r\varrho) \quad n = 2, 3, \dots, p$$

que l'on obtient en prenant dans la série de puissances de $J_0(r\varrho)$ les sommes des termes de degrés égaux à ou plus petits que

$$(5) \quad \left[\frac{2m}{p} (n-1) \right] - 2.$$

J_0 étant une fonction paire, il peut arriver que le degré du polynome p_n est une unité plus petite que (5). Supposons par exemple que $p = 2q$, et cherchons le degré de p_{q+1} . Dans ce cas, l'expression (5) est égale à $m - 2$. Or, p étant pair, m et $m - 2$ sont impairs. Mais, p_{q+1} est une fonction paire. Donc, le degré de p_{q+1} est égal à $m - 3$.

Comme on le voit, les différences

$$A_n(r\varrho) = J_0(r\varrho) - p_n(r\varrho),$$

que nous rencontrerons plus loin, sont divisibles par

$$\varrho^{\left[\frac{2m}{p} (n-1) \right] - 1}.$$

Considérons maintenant les polynômes suivants

$$(6) \quad B_{\nu,1} = 0, \\ B_{\nu,s}[(\xi - x)\varrho^{\frac{2m}{p}}, r\varrho] = \sum_{n=0}^{s-2} p_{s-n}(r\varrho) \frac{\cos(n-s+1)\theta_\nu}{n} \left[(\xi - x)\varrho^{\frac{2m}{p}} \right]^n \quad s = 2, 3, \dots, p.$$

Ces polynômes, étant au plus de degrés $p - 2$ en $\xi - x$ et $2m - 5$ en r , sont des solutions de l'équation (e). On trouve aisément la relation

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} B_{\nu,s} = -\varrho^{\frac{2m}{p}} B_{\nu,s-1}.$$

Nous allons démontrer que l'expression

$$(8) \quad \frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} = \frac{(-1)^{p-s}}{2p\pi} \sum_{\alpha=+}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\beta_\nu(\xi-x)\varrho^{\frac{2m}{p}}} \cos[\alpha_\nu(\xi-x)\varrho^{\frac{2m}{p}} - (s-1)\theta_\nu] \cdot \varrho J_0(r\varrho) - \right. \\ \left. - \varrho B_{\nu,s}[(\xi-x)\varrho^{\frac{2m}{p}}, r\varrho] \right\} \varrho^{-\frac{2m}{p}(s-1)} d\varrho \quad s = 1, 2, \dots, p$$

possède les propriétés demandées.

La condition d'intégrabilité est remplie à l'origine. En effet, considérons les coefficients des diverses puissances de $\xi - x$ de la fonction sous le signe intégral. Quand l'exposant de $\xi - x$ est égal à $s - 1$ ou plus grand, le coefficient

est divisible par q . Les coefficients des autres puissances $(\xi - x)^n$ sont, à des constantes près,

$$A_{s-n}(r) q^{1 - \frac{2m}{p}(s-n-1)} \quad n \leq s-2.$$

Ils sont divisibles par

$$q^{\left[\frac{2m}{p}(s-n-1) \right] - \frac{2m}{p}(s-n-1)}.$$

On voit donc que la condition d'intégrabilité est remplie.

Is en est de même à l'infini. D'abord, le cas $s=1$ a été considéré plus haut. De plus, le premier terme de la fonction sous le signe intégral est, en valeur absolue, moindre que

$$q^{1 - \frac{2m}{p}(s-1)} \quad s > 2,$$

et $\frac{2m}{p}(s-1)$ est plus grand que deux. Considérons le terme

$$(9) \quad q^{1 - \frac{2m}{p}(s-1)} B_{\nu, s}.$$

Évidemment, il suffit d'examiner l'expression que l'on obtient en jetant dans le polynome p_{s-n} de $B_{\nu, s}$ tous les termes, sauf celui de l'ordre le plus élevé. Les degrés des polynomes p_{s-n} étant égaux à, ou une unité plus petits que

$$(10) \quad \left[\frac{2m}{p}(s-n-1) \right] - 2,$$

les termes de cette expression sont divisibles par

$$(11) \quad q^{\left[\frac{2m}{p}(s-n-1) \right] - \frac{2m}{p}(s-n-1) - 1} \quad n = 0, \dots, s-2, \quad s \geq 2.$$

Dans le cas où le degré de p_{s-n} est une unité plus petit que (10), l'exposant de (11) doit être diminué d'une unité.

Si p est impair,

$$(12) \quad \frac{2m}{p}(s-n-1)$$

n'est jamais un nombre entier. Donc, dans ce cas la condition d'intégrabilité est certainement remplie.

Supposons maintenant que p est pair, $p=2q$. Alors, (12) est entier quand $s-n=q+1$, et seulement dans ce cas. Mais, nous avons vu plus haut que le degré du polynome p_{q+1} n'est plus (10), mais une unité plus petit, de sorte que (11) doit être remplacé par q^{-2} . Donc, même dans ce cas la condition d'intégrabilité est remplie.

On voit que quand $s > 1$, l'intégrale de l'expression (8) est uniformément convergente partout, de sorte que les fonctions $\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}}$ sont bien définies et continues même dans le point $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$.

L'expression (8) satisfait à l'équation (e). En prenant la dérivée par rapport à x , on trouve comme résultat l'expression (8) pour $\frac{\partial^{p-s+1} F}{\partial x^{p-s+1}}$. De plus, nous avons pour $s=1$ l'expression $\frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}}$ précédemment étudiée. Donc, (8) possède les propriétés demandées.

II) Soit maintenant $m < p$.

On a $1 < \frac{2m}{p} < 2$. Dans ce cas, on peut faire une intégration par rapport à x , la condition d'intégrabilité étant remplie, mais les intégrations suivantes exigent des termes complémentaires.

Nous prenons comme polynômes $B_{\nu, s}$

$$(13) \quad B_{\nu, 1} = B_{\nu, 2} = 0, \\ B_{\nu, s} |(\xi - x) \varrho^{\frac{2m}{p}}, r \varrho| = \sum_{n=0}^{s-3} p_s - n(r \varrho) \frac{\cos(n-s+1)\theta_\nu}{|n|} \left[(\xi - x) \varrho^{\frac{2m}{p}} \right]^n \quad s = 3, 4, \dots, p.$$

Ce sont des solutions de l'équation (e), le degré en $\xi - x$ étant au plus $p-3$, et celui en r au plus $2m-4$. La relation (7) subsiste.

En se servant de ces polynômes, on trouve pour les fonctions $\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}}$ la même expression que dans le cas précédent. La discussion se fait comme ci-dessus, et donne des résultats analogues. Quand $s > 2$, les fonctions sont bien définies même dans le point $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$.

Nous avons déterminé la fonction F pour $\xi > x$. En opérant de la même manière sur l'expression de $\frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}}$, donnée pour $\xi < x$, on trouve une représentation toute analogue qui vaut pour $\xi < x$.

Prenons maintenant dans (4) et (8) la nouvelle variable d'intégration λ définie par

$$\varrho(\xi - x)^{p/2m} = \lambda \quad \text{si } \xi > x \\ \varrho(x - \xi)^{p/2m} = \lambda \quad \text{si } x > \xi,$$

et introduisons les notations

$$\frac{r}{(\xi - x)^{p/2m}} = l', \quad \frac{r}{(x - \xi)^{p/2m}} = \theta'.$$

Nous trouvons

$$(14) \quad \frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} (\xi - x)^{-\frac{p}{m} + s - 1} f_{p-s}(t') \quad \xi > x \quad s = 1, 2, \dots, p$$

$$(x - \xi)^{-\frac{p}{m} + s - 1} g_{p-s}(\theta') \quad \xi < x$$

où

$$(15) \quad f_{p-s}(t') = \frac{(-1)^{p-s}}{2p\pi} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\beta_p \lambda^{\frac{2m}{p}}} \cos [\alpha_p \lambda^{\frac{2m}{p}} - (s-1)\theta_p] \cdot \lambda J_0(t\lambda) - \lambda B_{p,s}(\lambda^{\frac{2m}{p}}, t\lambda) \right\} \lambda^{-\frac{2m}{p}(s-1)} d\lambda,$$

expression qui vaut même pour $p = m = 1$, si nous posons dans ce cas $B_{p,1} = 0$. La fonction $g_{p-s}(\theta')$ est donnée par une expression toute analogue.

L'expression (15) nous montre que $f_{p-s}(t')$ est une fonction entière de t' . Elle nous donne le développement en série de puissances de cette fonction. De même, $g_{p-s}(\theta')$ est une fonction entière de θ' .

28. Nous pouvons maintenant définir la solution fondamentale par l'expression (F), modifiée par l'addition d'un terme complémentaire. En effet, considérons l'intégrale double

$$(16) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\xi-x)} \varrho J_0(r\varrho) - \varrho E[\alpha(\xi-x), r\varrho]}{i^p \alpha^p + \alpha(-1)^m \varrho^{2m}} d\alpha d\varrho,$$

où le polynôme E est composé de la manière suivante

$$\text{I) } p = 1 \quad E = 0,$$

$$\text{II) } p > 1 \quad E = \sum_{n=0}^{n_0} p_{p-n}(r\varrho) \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|} \quad n_0 = \begin{cases} p-2 & \text{si } m > p \\ p-3 & \text{si } m < p \end{cases}.$$

On constate aisément qu'en évaluant l'intégrale par rapport à α , puis prenant la partie réelle, on obtient l'expression de F , trouvée plus haut.

Examinons si la partie réelle de (16) est convergente.

$$\text{I) } p = 1.$$

En prenant la partie réelle de (16), on obtient

$$(17) \quad F = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha(\xi-x) \cdot \varrho^{2m+1} J_0(r\varrho)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} d\alpha d\varrho + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \varrho \sin \alpha(\xi-x) J_0(r\varrho)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} d\alpha d\varrho.$$

Nous allons montrer que les deux intégrales doubles sont convergentes pour $x \neq \xi$ quand $m > 1$. Quand $m = 1$, la méthode appliquée nous apprend seulement qu'elles sont convergentes pour $x \neq \xi$ et $r > 0$. Cependant, nous nous dispen-

sons d'examiner la convergence pour $r=0$, $x \neq \xi$ dans ce cas, qui est le cas bien connu de l'équation de la chaleur.

D'abord, les parties étendues au domaine $0 \leq \varrho \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ sont absolument convergentes. En effet, la première est moindre en valeur absolue que

$$\int_0^\infty d\varrho \int_0^{\alpha_0} d\alpha \frac{\varrho^{2m+1} |J_0(r\varrho)|}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} = \int_0^\infty \varrho |J_0(r\varrho)| \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\varrho^{2m}} d\varrho,$$

intégrale convergente, si toutefois $r > 0$ quand $m=1$. La valeur absolue de la seconde est moindre que

$$\int_0^\infty d\varrho \int_0^{\alpha_0} d\alpha \frac{\alpha \varrho}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varrho \log \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{\varrho^{4m}} \right) d\varrho.$$

Nous allons montrer que les intégrales

$$(18) \quad \int_0^\infty d\varrho \int_{\alpha_0}^A d\alpha \frac{\cos \alpha(\xi - x) \cdot \varrho^{2m+1} J_0(r\varrho)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} \text{ et } \int_0^\infty d\varrho \int_{\alpha_0}^A d\alpha \frac{\alpha \varrho \sin \alpha(\xi - x) J_0(r\varrho)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}}$$

sont uniformément convergentes pour $A > \alpha_0$ si $x \neq \xi$. Quand $m=1$, il faut encore supposer que $r > 0$.

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_{\alpha_0}^A \frac{\cos \alpha(\xi - x)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} d\alpha = \frac{1}{\xi - x} \left(\frac{\sin A(\xi - x)}{A^2 + \varrho^{4m}} - \frac{\sin \alpha_0(\xi - x)}{\alpha_0^2 + \varrho^{4m}} + 2 \int_{\alpha_0}^A \frac{\alpha \sin \alpha(\xi - x)}{(\alpha^2 + \varrho^{4m})^2} d\alpha \right)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^A \frac{\alpha \sin \alpha(\xi - x)}{\alpha^2 + \varrho^{4m}} d\alpha = & \frac{1}{\xi - x} \left(\frac{\alpha_0 \cos \alpha_0(\xi - x)}{\alpha_0^2 + \varrho^{4m}} - \frac{A \cos A(\xi - x)}{A^2 + \varrho^{4m}} + \right. \\ & \left. + \int_{\alpha_0}^A \frac{(\varrho^{4m} - \alpha^2) \cos \alpha(\xi - x)}{(\alpha^2 + \varrho^{4m})^2} d\alpha \right). \end{aligned}$$

Quand $x \neq \xi$, les modules de ces expressions sont inférieurs à

$$\frac{2}{|\xi - x|} \varrho^{-4m} \left(1 + \int_0^\infty \frac{\beta d\beta}{(1 + \beta^2)^2} \right)$$

et

$$\frac{1}{|\xi - x|} \varrho^{-2m} \left(2 + \int_0^\infty \frac{d\beta}{1 + \beta^2} \right).$$

Par suite, les modules des parties des intégrales (18) qui viennent du champ d'intégration $0 \leq \varrho \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq A$ sont inférieurs à

$$M \int_0^\infty |J_0(r\varrho)| \varrho^{1-2m} d\varrho,$$

où M est indépendant de A , d'où suit la justesse de l'énoncé.

Les intégrales (18) sont des fonctions continues de A , qui ont des limites quand A tend vers l'infini. On voit donc que les intégrales doubles (17) existent.

II) $p > 1$.

Montrons que l'intégrale (16) est absolument convergente. Écrivons le numérateur de la fonction sous le signe intégral de la manière suivante

$$\left(e^{i\alpha(\xi-x)} - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|} \right) \varrho J_0(r\varrho) + \varrho \sum_{n=0}^{n_0} [J_0(r\varrho) - p_{p-n}(r\varrho)] \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|}.$$

D'abord, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\varrho \left(e^{i\alpha(\xi-x)} - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|} \right) \frac{\varrho J_0(r\varrho)}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}}$$

est absolument convergente. En effet, en posant $\varrho = \alpha^{\frac{p}{2m}} \lambda$ on trouve qu'elle est, en valeur absolue, moindre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \alpha^{\frac{p}{m}-p} \left| e^{i\alpha(\xi-x)} - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|} \right| \int_0^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda}{|i^p \alpha^p + a(-1)^m \lambda^{2m}|},$$

et on voit aisément que cette dernière expression est convergente.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \frac{\varrho}{i^p \alpha^p + a(-1)^m \varrho^{2m}} \sum_{n=0}^{n_0} [J_0(r\varrho) - p_{p-n}(r\varrho)] \frac{[i\alpha(\xi-x)]^n}{|n|}.$$

En prenant au lieu de α la variable d'intégration λ définie par $\alpha = \varrho^{\frac{2m}{p}} \lambda$, on trouve que cette intégrale est, en valeur absolue, moindre que

$$\sum_{n=0}^{n_0} \frac{|\xi-x|^n}{|n|} \int_0^{+\infty} d\varrho \varrho^{1-2m+\frac{2m}{p}(n+1)} |J_0(r\varrho) - p_{p-n}(r\varrho)| \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\lambda^n}{|i^p \lambda^p + a(-1)^m|},$$

expression qui est bien convergente. On voit donc que (16) est absolument convergente.

29. En évaluant l'intégrale par rapport à ϱ de l'expression de F , on obtient une représentation, qui est valable même quand $x = \xi$. Les formules dont on a besoin se trouvent dans le paragraphe 8.

I) $p = 1$.

L'expression (17) devient

$$F = \frac{1}{4m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_2(r\alpha^{\frac{1}{2m}}) \cos \alpha(\xi-x) + R_3(r\alpha^{\frac{1}{2m}}) \sin \alpha(\xi-x) \right\} \alpha^{-1+\frac{1}{m}} d\alpha.$$

II) $p > 1$.

A) Prenons d'abord l'équation (e_1).

On a

$$F = \frac{(-1)^q}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ J_0(r\rho) \cos \alpha(\xi - x) - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{n_1} (-1)^n p_{2(q-n)}(r\rho) \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n}}{2n} \right\} \frac{\rho}{\alpha^{2q}} \cdot \frac{\rho}{\rho^{2m}} d\alpha d\rho,$$

la limite supérieure de la somme étant définie par

$$n_1 = \begin{cases} q - 1 & \text{si } m > 2q \\ q - 2 & \text{si } m < 2q. \end{cases}$$

En effectuant l'intégration par rapport à ρ , on obtient

$$F = \frac{(-1)^q}{2m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_1(r\alpha^{\frac{q}{m}}) \cos \alpha(\xi - x) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{n_1} (-1)^n \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n}}{2n} \sum_{s=0}^{\omega_0} (-1)^s \frac{(r\alpha^{\frac{q}{m}})^{2s}}{2^{2s}(\frac{q}{m})^2} \frac{1}{\sin(s+1)\frac{\pi}{m}} \right\} \alpha^{2q + \frac{2q}{m}} d\alpha.$$

Quand

$$\Omega_0 = \left[\frac{m}{q} (2q - 2n - 1) \right] \cdot 2$$

est un nombre pair ou zéro, la limite ω_0 est égale à $\frac{1}{2} \Omega_0$. Sinon, on a $\omega_0 = \frac{1}{2} (\Omega_0 - 1)$.

B) Dans le cas de l'équation (e₂), on a

$$F = \frac{(-1)^q}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ J_0(r\rho) \left[\rho^{2m} \cos \alpha(\xi - x) + \alpha^{2q+1} \sin \alpha(\xi - x) \right] \right. \\ \left. - \rho^{2m} \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n p_{2(q-n)+1}(r\rho) \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n}}{2n} \right. \\ \left. + \alpha^{2q+1} \sum_{n=0}^{n_2} (-1)^n p_{2(q-n)}(r\rho) \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n+1}}{2n+1} \right\} \frac{\rho}{\alpha^{4q+2}} \cdot \rho^{4m} d\alpha d\rho,$$

où

$$n_2 = \begin{cases} q - 1 & \text{si } m > p \\ q - 2 & \text{si } m < p. \end{cases}$$

Nous trouvons

$$F = \frac{(-1)^q}{4m\pi^2} \int_0^\infty \left\{ R_2(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \cos \alpha(\xi - x) + R_3(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}}) \sin \alpha(\xi - x) - \right. \\ \left. - \frac{\pi^{q-1}}{2} \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n}}{2n} \sum_{s=0}^{\omega_1} (-1)^s \frac{(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}})^{2s}}{2^{2s}(s)^2} \frac{1}{\cos(s+1)\frac{\pi}{2m}} \right. \\ \left. + \frac{\pi^{n_2}}{2} \sum_{n=0}^{n_2} (-1)^n \frac{[\alpha(\xi - x)]^{2n+1}}{2n+1} \sum_{s=0}^{\omega_2} (-1)^s \frac{(r\alpha^{\frac{2q+1}{2m}})^{2s}}{2^{2s}(s)^2} \frac{1}{\sin(s+1)\frac{\pi}{2m}} \right\} \alpha^{-2q-1+\frac{2q+1}{m}} d\alpha.$$

En posant

$$\Omega_1 = \left[\frac{2m}{2q+1} (2q-2n) \right] - 2, \quad \Omega_2 = \left[\frac{2m}{2q+1} (2q-2n-1) \right] - 2,$$

on a $\omega_i = \frac{1}{2} \Omega_i$ quand Ω_i est pair ou égal à zéro, tandis que $\omega_i = \frac{1}{2}(\Omega_i - 1)$ quand Ω_i est impair.

Les expressions trouvées montrent que F et ses dérivées sont bien définies et continues pour $r > 0$, même si $x = \xi$. D'autre part, l'expression (8) nous montre que ces fonctions sont continues pour $x > \xi$, même quand $r = 0$. Par conséquent, F est régulière, sauf dans le point $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \xi$.

En prenant au lieu de α la variable d'intégration λ définie par

$$\lambda = \begin{cases} \alpha(\xi - x) & \xi > x \\ \alpha(x - \xi) & \xi < x. \end{cases}$$

nous obtenons des nouvelles expressions de $f_0(t')$ et $g_0(\theta')$, favorables quand il s'agit de trouver les représentations asymptotiques de ces fonctions, valables quand t' ou θ' tend vers $+\infty$. Cependant, nous nous dispensons de les écrire.

30. Étudions maintenant les solutions de la forme

$$(19) \quad v = (\xi - x)^h \varphi \left(\frac{r}{(\xi - x)^{\frac{p}{2m}}} \right) = (\xi - x)^h \varphi(t')$$

de l'équation adjointe

$$(m) \quad (-1)^p \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + a \mathcal{A}^m v = 0.$$

On a

$$\mathcal{A}v = (\xi - x)^{h-\frac{p}{m}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dt'^2} + \frac{1}{t'} \frac{d\varphi}{dt'} \right).$$

En appliquant la notation

$$D\varphi(t') = \frac{d^2 \varphi}{dt'^2} + \frac{1}{t'} \frac{d\varphi}{dt'},$$

cette expression s'écrit

$$lv = (\xi - x)^{h - \frac{p}{m}} D^p q(t').$$

Donc

$$A^m v = (\xi - x)^{h - p} D^m \varphi(t').$$

D'autre part

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\xi - x)^{h-1} d_h q(t'),$$

où le symbole d'opération d_h est défini par

$$d_h = \left(h - \frac{p}{2m} t' \frac{d}{dt'} \right).$$

Par suite

$$\frac{\partial^p v}{\partial x^p} = (-1)^p (\xi - x)^{h-p} \delta_h^p \varphi(t'),$$

où nous avons posé

$$\delta_h^p = d_{h-p+1} d_{h-p+2} \dots d_h.$$

En introduisant ces expressions dans l'égalité (m), on trouve pour φ l'équation

$$(20) \quad \delta_h^p \varphi + a D^m \varphi = 0,$$

équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre $2m$. Si φ satisfait à cette équation, (19) est une solution de (m). Comme on le voit, les seuls singularités des intégrales de (20) sont $t' = 0$ et $t' = \infty$.

On trouve une équation toute analogue en partant d'une solution de la forme $(x - \xi)^h \varphi(\theta')$.

Considérons les équations (20) qui correspondent aux fonctions

$$\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} = (\xi - x)^{-\frac{p}{m} + s - 1} f_{p-s}(t') \quad s = 1, 2, \dots, p,$$

c'est-à-dire les équations

$$(21) \quad \delta_h^p f_{p-s} + a D^m f_{p-s} = 0,$$

où

$$h = -\frac{p}{m} + s - 1.$$

Le symbole δ_h^p contient les opérations

$$d_{-\frac{p}{m} + s - p}, d_{-\frac{p}{m} + s - p + 1}, \dots, d_{-\frac{p}{m} + s - 1}.$$

Entre ces opérations se trouve toujours l'opération

$$d_{-\frac{p}{m}} = -\frac{p}{m} \varphi - \frac{p}{2m} t' \frac{d}{dt'}.$$

Dans δ_h^p , l'ordre dans lequel on effectue les opérations d n'a pas d'importance. Par conséquent, on peut écrire

$$\delta_h^p = d \underset{m}{p} \delta',$$

où δ' contient les autres opérations d .

Le premier terme de l'équation (20) s'écrit

$$\delta_h^p f_{p-s} = \frac{p-1}{m} \frac{d}{dt'} \left(\frac{t'^2}{2} \delta' f_{p-s} \right).$$

De plus,

$$D f_{p-s} = \frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} \left(t' \frac{d f_{p-s}}{dt'} \right).$$

Donc, l'équation (20) nous donne

$$\frac{d}{dt'} \left(-\frac{p}{m} \frac{t'^2}{2} \delta' f_{p-s} + a t' \frac{d}{dt'} D^{m-1} f_{p-s} \right) = 0,$$

ou, en intégrant,

$$-\frac{p}{m} \frac{t'^2}{2} \delta' f_{p-s} + a t' \frac{d}{dt'} D^{m-1} f_{p-s} = C_{p-s}.$$

En observant que f_{p-s} sont des fonctions entières paires, nous voyons, en posant $t' = 0$, que les constantes C_{p-s} sont nulles, et nous obtenons finalement

$$-\frac{p}{2m} t' \delta' f_{p-s} + a \frac{d}{dt'} D^{m-1} f_{p-s} = 0.$$

On trouve facilement que $\delta' f_0 = (-1)^{p+1} f_{p-1}(t')$. Par suite, la formule ci-dessus nous donne pour $s=p$ la relation

$$(22) \quad t' f_{p-1}(t') = (-1)^{p+1} a \frac{2m}{p} \frac{d}{dt'} D^{m-1} f_0(t').$$

31. Examinons maintenant comment se comporte à l'infini la fonction f_{p-s} . En prenant la nouvelle variable d'intégration μ en posant $t'\lambda = \mu$, on obtient

$$(23) \quad f_{p-s}(t') = t'^{\frac{2m}{p}(s-1)-2} \frac{(-1)^{p-s}}{2p\pi} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\beta_\nu \left(\frac{\mu}{t'} \right)^{\frac{2m}{p}}} \cos \left[\alpha_\nu \left(\frac{\mu}{t'} \right)^{\frac{2m}{p}} - (s-1)\theta_\nu \right] J_0(\mu) - \right. \\ \left. - B_{\nu,s} \left[\left(\frac{\mu}{t'} \right)^{\frac{2m}{p}}, \mu \right] \right\} \mu^{-\frac{2m}{p}(s-1)+1} d\mu.$$

Quand $s \geq 3$, ainsi que quand $s=2$, $m > p$, l'exposant $\frac{2m}{p}(s-1)-1$ est plus grand que l'unité. Donc, en faisant tendre t' vers l'infini, on obtient

$$(24) \quad \lim_{t' \rightarrow +\infty} t'^{2-\frac{2m}{p}(s-1)} f_{p-s}(t') = K_{p-s}^{+} \quad s \geq 3; \quad s=2 \quad m > p,$$

où les constantes K_{p-s}^{+} sont données par

$$(25) \quad K_{p-s}^{+} = \frac{(-1)^{p-s}}{2p\pi} \int_0^{\infty} [J_0(\mu) - p_s(\mu)] \mu^{-\frac{2m}{p}(s-1)+1} d\mu \cdot \sum_{\alpha_+} \cos(s-1)\theta_{\nu}.$$

On trouve de même

$$(26) \quad \lim_{\theta' \rightarrow +\infty} \theta'^{2-\frac{2m}{p}(s-1)} g_{p-s}(\theta') = K_{p-s} \quad s \geq 3; \quad s=2 \quad m > p,$$

où

$$(27) \quad K_{p-s} = \frac{(-1)^{p-s-1}}{2p\pi} \int_0^{\infty} [J_0(\mu) - p_s(\mu)] \mu^{-\frac{2m}{p}(s-1)+1} d\mu \cdot \sum_{\alpha} \cos(s-1)\theta_{\nu}.$$

Il faut traiter le cas $s=2$, $m < p$, et chercher la limite

$$(28) \quad \lim_{t' \rightarrow +\infty} t'^{2-\frac{2m}{p}} f_{p-2}(t') \quad m < p.$$

Partons de l'expression (15) de $f_{p-2}(t')$. En faisant usage de la relation

$$(29) \quad t'\lambda J_0(t'\lambda) = \frac{1}{t'} \frac{d}{d\lambda} [t'\lambda J_1(t'\lambda)],$$

nous obtenons en intégrant par parties

$$(30) \quad f_{p-2}(t') = \frac{(-1)^{p-2m}}{p^2\pi} \sum_{\alpha_-} \left\{ \frac{1}{t'} \int_0^{\infty} e^{-\beta_+ \lambda^{\frac{2m}{p}}} \cos(\alpha_+ \lambda^{\frac{2m}{p}} - \theta_{\nu}) \cdot \lambda^{-\frac{2m}{p}} J_1(t'\lambda) d\lambda - \right. \\ \left. \frac{1}{t'} \int_0^{\infty} e^{-\beta_+ \lambda^{\frac{2m}{p}}} \cos(\alpha_+ \lambda^{\frac{2m}{p}}) \cdot J_1(t'\lambda) d\lambda \right\}.$$

Évidemment, la partie de la limite (28) qui vient du dernier terme est zéro.

En posant dans la première intégrale $t'\lambda = \mu$, on trouve

$$(31) \quad \lim_{t' \rightarrow +\infty} t'^{2-\frac{2m}{p}} f_{p-2}(t') = K_{p-2}^{+},$$

la constante K_{p-2}^{+} étant donnée par

$$(32) \quad K_{p-2}^{+} = \frac{(-1)^{p-2m}}{p^2\pi} \int_0^{\infty} \mu^{-\frac{2m}{p}} J_1(\mu) d\mu \cdot \sum_{\alpha_+} \cos \theta_{\nu}.$$

De même

$$(33) \quad \lim_{\theta' \rightarrow +\infty} \theta'^{2-\frac{2m}{p}} g_{p-2}(\theta') = K_{p-2}^{-},$$

où

$$(34) \quad K_{p-2}^{-} = \frac{(-1)^{p-1}m}{p^2\pi} \int_0^{\infty} \mu^{-\frac{2m}{p}} J_1(\mu) d\mu \cdot \sum_{\alpha_-} \cos \theta_{\nu}.$$

La différence $K_{p-s}^+ - K_{p-s}^-$ contient le facteur

$$\sum_{\alpha} \cos(s-1)\theta_{\nu},$$

qui est la partie réelle de

$$\sum_{\alpha} e^{i\theta_{\nu}(s-1)}.$$

Or, $e^{i\theta_{\nu}}$ étant racines de l'équation

$$x^p + \alpha(-1)^m = 0,$$

cette somme est zéro. Par conséquent,

$$(35) \quad K_{p-s}^+ - K_{p-s}^- = 0 \quad s \geq 2.$$

32. Il faut chercher les valeurs des intégrales

$$(36) \quad I_1 = \int_0^{\infty} f_{p-1}(t') t' dt' \text{ et } I_2 = \int_0^{\infty} g_{p-1}(\theta') \theta' d\theta.$$

La fonction $D^{m-1}f_0$ tend vers zéro quand t' croît vers l'infini. On le trouve en examinant sa représentation asymptotique, obtenue en partant de l'expression de F du paragraphe 29. Par suite, en faisant usage de la formule (22), on obtient

$$I_1 = (-1)^p a^{\frac{2m}{p}} (D^{m-1}f_0)_{t'=0}.$$

Or, en faisant usage de (8), on trouve

$$(37) \quad D^{m-1}f_0 = \frac{(-1)^{m-1}}{4m\pi} \sum_{\alpha \neq \pm} \int_0^{\infty} e^{-\beta_{\nu} \mu} \cos[\alpha_{\nu} \mu - (p-1)\theta_{\nu}] J_0(t' \mu^{\frac{p}{2m}}) d\mu.$$

Par suite

$$(D^{m-1}f_0)_{t'=0} = \frac{(-1)^m}{4m\pi} \sum_{\alpha \neq \pm} \int_0^{\infty} e^{-\beta_{\nu} \mu} \cos[\alpha_{\nu} \mu - (p-1)\theta_{\nu}] d\mu.$$

L'intégrale de cette expression est la partie réelle de

$$\int_0^{\infty} e^{i\mu \nu^{i\theta_{\nu} - i(p-1)\theta_{\nu}}} d\mu = \frac{(-1)^m}{a}.$$

Donc

$$(38) \quad I_1 = \frac{(-1)^{p+1}}{2p\pi} N_+,$$

où N_+ désigne le nombre de racines $\bar{\alpha}_{\nu}$ à partie imaginaire positive.

On trouve de même

$$(39) \quad I_2 = \frac{(-1)^p}{2p\pi} N_-.$$

N_- étant le nombre de racines à partie imaginaire négative.

33. Revenons maintenant à la formule fondamentale (1) du paragraphe 1. Le volume V sera limité par la surface S définie dans le paragraphe 26. Supposons u régulière dans V et sur S , et posons $v = F$. Quand $p = 1$, F est égale à zéro pour $x > \xi$ ou pour $x < \xi$. Donc, dans ce cas la surface donnée peut être prise ouverte, une des surfaces σ_{c_0} et σ_{c_1} étant infiniment éloignée. Nous devons considérer divers cas suivant la position du point $P(\xi, \eta, \zeta)$

I) Supposons que P est extérieur à V .

Le point singulier P étant extérieur à V , v aussi est régulière dans V et sur S , et nous pouvons appliquer la formule (1) du paragraphe 26.

II) Supposons maintenant que P se trouve dans V .

Isolons le point P par les plans $x = \xi - \varepsilon_1$ et $x = \xi + \varepsilon_2$, ε_1 et ε_2 étant des nombres positifs, très petits. Appelons $\Sigma_{\xi - \varepsilon_1}$ la partie de Σ limitée par $x = c_0$ et $x = \xi - \varepsilon_1$. De même $\Sigma_{\xi + \varepsilon_2}$ sera la partie limitée par $x = \xi + \varepsilon_2$ et $x = c_1$. Appliquons la formule (1) du paragraphe 1, d'abord au volume limité par σ_{c_0} , $\sigma_{\xi - \varepsilon_1}$, et $\Sigma_{\xi - \varepsilon_1}$, puis au volume limité par $\sigma_{\xi + \varepsilon_2}$, σ_{c_1} et $\Sigma_{\xi + \varepsilon_2}$, et ajoutons les formules. Enfin, faisons tendre les ε_i vers zéro. Quand $p = 1$, nous n'avons à considérer que l'un de ces volumes.

1) Évidemment, les intégrales étendues à σ_{c_0} et σ_{c_1} sont convergentes, F étant régulière. Il en est de même des intégrales étendues à $\Sigma_{\xi - \varepsilon_1}$ et $\Sigma_{\xi + \varepsilon_2}$, qui ont bien des limites quand ε_i tendent vers zéro.

2) Examinons les intégrales à $\sigma_{\xi - \varepsilon_1}$ et $\sigma_{\xi + \varepsilon_2}$.

a) Considérons d'abord les intégrales

$$(40) \quad (-1)^{p-s} \int_{\sigma_{\xi - \varepsilon_1}} \left(\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x^{s-1}} \right) dy dz - (-1)^{p-s} \int_{\sigma_{\xi + \varepsilon_2}} \left(\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x^{s-1}} \right) dy dz \quad s \geq 2.$$

Introduisons dans (14) la variable r en posant

$$\xi - x = \left(\frac{r}{l'} \right)^{\frac{2m}{p}} \quad \text{ou} \quad x - \xi = \left(\frac{r}{\theta'} \right)^{\frac{2m}{p}}.$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}} = r^{\frac{2m}{p}(s-1)-2} \frac{l'^{2-\frac{2m}{p}(s-1)}}{\theta'^{2-\frac{2m}{p}(s-1)}} f_{p-s}(l') \\ r^{\frac{2m}{p}(s-1)-2} \theta'^{2-\frac{2m}{p}(s-1)} g_{p-s}(\theta').$$

Introduisons ces expressions dans (40), et prenons des coordonnées polaires. La fonction sous le signe intégral est finie pour $r = 0$. En effet, l'expression (8) montre que $r \frac{\partial^{p-s} F}{\partial x^{p-s}}$, $s \geq 2$ est finie, même dans P , sauf peut être quand $s = 2$, $m < p$.

Mais, dans ce cas on a

$$r \frac{\partial^{p-2} F}{\partial x^{p-2}} = (\xi - x)^{1-\frac{p}{2m}} l' f_{p-2}(l'),$$

et (30) montre que cette expression est finie. Quand $r > 0$, les expressions

$$(t')_{x=\xi-\varepsilon_1} = r\varepsilon_1^{-\frac{p}{2m}} \text{ et } (\theta')_{x=\xi+\varepsilon_2} = r\varepsilon_2^{-\frac{p}{2m}}$$

tendent vers l'infini quand les ε_i tendent vers zéro. Nous obtenons donc, en tenant compte de (24) (26) (31) et de (33), et en remarquant que l'exposant du facteur

$$r^{\frac{2m}{p}(s-1)-1},$$

qui figure dans la fonction sous le signe intégral, est positif,

$$(-1)^{p-s}(K_{p-s}^+ - K_{p-s}^-) \int \int_{\sigma_{\xi}} r^{\frac{2m}{p}(s-1)-1} \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x^{s-1}} d\psi dr,$$

qui est égale à zéro d'après (35).

b) Il reste à examiner les intégrales

$$(41) \quad (-1)^{p+1} \int \int_{\sigma_{\xi-\varepsilon_1}} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}} u dy dz = (-1)^{p+1} \int \int_{\sigma_{\xi+\varepsilon_2}} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}} u dy dz.$$

On a

$$(42) \quad \int \int_{\sigma_c} dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{Q(\psi, c)} r d\psi dr + \sum_i \int_{\psi_{0i}}^{\psi_{1i}} \int_{Q_{0i}}^{Q_{1i}} r d\psi dr.$$

Considérons la première intégrale de (41). D'après (42), nous devons d'abord examiner

$$(-1)^{p+1} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{Q(\psi, \xi-\varepsilon_1)} dr u(\xi-\varepsilon_1, \eta=r \cos \psi, \zeta=r \sin \psi) \frac{1}{\varepsilon_1^{p/2m}} t' f_{p-1}(t'),$$

ou, si nous prenons au lieu de r t' comme variable d'intégration,

$$(-1)^{p+1} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varepsilon_1^{p/2m}} dt' u(\xi-\varepsilon_1, \eta=\varepsilon_1^{\frac{p}{2m}} t' \cos \psi, \zeta=\varepsilon_1^{\frac{p}{2m}} t' \sin \psi) t' f_{p-1}(t').$$

Quand ε_i tend vers zéro, cette expression devient

$$(-1)^{p+1} u(\xi, \eta, \zeta) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} dt' t' f_{p-1}(t') = u(\xi, \eta, \zeta) \frac{N}{p}.$$

On trouve de même que les intégrales qui viennent de la somme dans (42) ont zéro pour limite.

La seconde intégrale de (41) donne

$$u(\xi, \eta, \zeta) \frac{N}{p}.$$

Donc, la limite de (41) devient

$$u(\xi, \eta, \zeta).$$

En réunissant les résultats, nous obtenons les formules

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad u(\xi, \eta, \zeta) \Big\} &= - \iint_{\sigma_{c_0} + \sigma_{c_1} + \Sigma} \left(F \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^{p-2} u}{\partial x^{p-2}} + \dots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{p-1}} u \right) \cos x N d\sigma + \\ (\alpha_2) \quad 0 \quad &+ a \iint_{\Sigma} \left(F \cdot \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} u - \frac{\partial F}{\partial n} \cdot A^{m-1} u + \dots + A^{m-1} F \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} A^{m-1} F \cdot u \right) ds dx, \end{aligned}$$

où (α_1) vaut quand P est intérieur à Γ_ξ , et (α_2) quand P est extérieur à Γ_ξ .

